

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Marcel Țena • Marian Andronache • Dinu Șerbănescu

MATEMATICĂ M1

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

I. PERMUTĂRI

NOȚIUNEA DE PERMUTARE ÎNMULTĂRIEA PERMUTĂRILOR

Am văzut în clasa a X-a că o **permutare** a unei mulțimi nevide A este o funcție bijectivă definită pe A cu valori în A , iar dacă mulțimea A are n elemente, atunci numărul permutărilor sale este $n!$.

Vom folosi noțiunea de permutare pentru definirea, în capitolul „Determinanți”, a unei caracteristici numerice, numită determinantul unei matrice. Pentru acest scop este suficient să considerăm permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm mulțimea acestor permutări cu S_n și o numim **mulțimea permutărilor de gradul n** .

De obicei, o permutare $\sigma \in S_n$ se notează printr-un tablou de tipul:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prin această scriere, **compunerea** permutărilor (pe care o notăm multiplicativ) se face foarte ușor.

Astfel, dacă $\sigma, \tau \in S_n$ iar $\tau(i) = j$, $\sigma(j) = k$, atunci $(\sigma \circ \tau)(i) = (\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(j) = k$, deci compunerea se face după următoarea „schemă”:

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & k & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & j & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & k & \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De exemplu, dacă $\sigma, \tau \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și} \\ \tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Datorită notației multiplicative, această operație se numește **înmulțirea** permutărilor. Deoarece injectivitatea și surjectivitatea sunt păstrate prin compunere, rezultă că prin înmulțirea a două elemente din S_n obținem un element din S_n .

PROPRIETĂȚILE ÎNMULȚIRII PERMUTĂRILOR

Am văzut în clasele a IX-a și a X-a că, pe mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime nevidă A cu valori în A , compunerea funcțiilor este asociativă, funcția $1_A : A \rightarrow A$ cu $1_A(x) = x$, $x \in A$ este element neutru și orice funcție bijectivă este inversabilă.

În consecință, înmulțirea permutărilor are, pe S_n , proprietățile:

a) este asociativă, deci $(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi)$, $\forall \sigma, \tau, \varphi \in S_n$.

b) are element neutru, anume permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$,

deci $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall \sigma \in S_n$.

c) orice permutare este inversabilă, deci pentru $\sigma \in S_n$ există $\sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e$; permutarea σ^{-1} se numește *inversa* permutării σ .

Observații. 1) Pentru $\sigma \in S_n$, permutarea σ^{-1} se obține schimbând locul celor două linii din tabloul care definește permutarea σ .

De exemplu, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Înmulțirea permutărilor pe S_n , $n \geq 3$ nu este comutativă, deci, în general, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ pentru $\sigma, \tau \in S_n$.

În situația particulară în care, pentru permutările $\sigma, \tau \in S_n$, avem $\sigma\tau = \tau\sigma$, vom spune că cele două permutări comută.

3) Proprietățile înmulțirii permutărilor ne permit să definim, pentru o permutare $\sigma \in S_n$, puterile întregi ale lui σ , astfel:

$$\sigma^k = \begin{cases} \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdot \dots \cdot \sigma}_{k \text{ ori}}, & \text{pentru } k \in \mathbb{N}^* \\ e, & \text{pentru } k = 0 \\ (\sigma^{-k})^{-1}, & \text{pentru } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Din această definiție rezultă că $\sigma^k \cdot \sigma^p = \sigma^{k+p}$ și $(\sigma^k)^p = \sigma^{kp}$, $\forall k, p \in \mathbb{Z}$.

Dacă $\sigma, \tau, \varphi \in S_n$ avem echivalențele:

$$a) \sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$$

$$b) \tau\sigma = \varphi\sigma \Leftrightarrow \tau = \varphi$$

Într-adevăr, $\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \sigma^{-1}(\sigma\tau) = \sigma^{-1}(\sigma\varphi) \Leftrightarrow (\sigma^{-1}\sigma)\tau = (\sigma^{-1}\sigma)\varphi \Leftrightarrow e \cdot \tau = e \cdot \varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$ și analog pentru echivalența de la punctul b).

Echivalențele a) și b) stabilesc reguli de simplificare la stânga și la dreapta pentru înmulțirea permutărilor.

INVERSIUNI, SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Pentru o permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, o pereche ordonată (i, j) cu $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ în care $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$ se numește *inversiune* a lui σ .

De exemplu, inversiunile permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ sunt perechile $(2, 3)$, $(2, 4)$ și $(3, 4)$,

pentru că $\sigma(2) = 4 > 3 = \sigma(3)$, $\sigma(2) = 4 > 2 = \sigma(4)$ și $\sigma(3) = 3 > 2 = \sigma(4)$.

Permutările care au un număr par de inversiuni se numesc *permutări pare*, iar cele care au un număr impar de inversiuni se numesc *permutări impare*.

Pentru $\sigma \in S_n$, considerăm numărul rațional $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ care, datorită proprietăților date de propoziția ce urmează, se numește *semnul* permutării σ .

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$ dacă σ este permutare pară și $\varepsilon(\sigma) = -1$ dacă σ este permutare impară.

Demonstrație. Deoarece σ este bijectivă avem $\prod_{i \neq j} (\sigma(i) - \sigma(j)) = \prod_{\sigma^{-1}(k) \neq \sigma^{-1}(p)} (k - p) = \prod_{k \neq p} (k - p) = \prod_{i \neq j} (i - j)$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } (\varepsilon(\sigma))^2 &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i \neq j} (i - j)} = 1, \text{ deci } |\varepsilon(\sigma)| = 1. \end{aligned}$$

Deoarece o pereche (i, j) cu $i < j$ este inversiune a lui σ dacă și numai dacă fracția $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ este negativă, rezultă din definiția lui $\varepsilon(\sigma)$, că semnul lui este dat de numărul inversiunilor lui σ . În concluzie, dacă σ este pară atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$, iar dacă σ este impară $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Comportarea lui ε față de produsul permutărilor este evidențiată de următoarea propoziție.

Propoziție

1°. $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau)$, $(\forall) \sigma, \tau \in S_n$.

2°. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, $(\forall) \sigma \in S_n$.

Demonstrație. 1°. Din definiția lui ε rezultă că:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(i) - (\sigma\tau)(j)}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \cdot \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \\ &= \prod_{1 \leq k < p \leq n} \frac{\sigma(k) - \sigma(p)}{k - p} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

2°. Deoarece permutarea e nu are inversiuni, rezultă că $\varepsilon(e) = 1$ și în consecință $\varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Vom pune acum în evidență un tip particular de permutare, necesar în studiul proprietăților determinanților din capitolul 3.

O permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$ se numește **transpoziție** dacă există $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $i \neq j$ astfel încât $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ și $\sigma(k) = k$ pentru orice $k \notin \{i, j\}$. Vom nota transpoziția σ cu (i, j) , deci

$$(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n.$$

De exemplu, în S_5 avem $(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $(5, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietățile transpozițiilor sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$ o transpoziție. Atunci:

1°) $\sigma = \sigma^{-1}$.

2°) $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Demonstrație. 1°) Dacă $\sigma = (i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$, atunci

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix} = (j, i) = (i, j) = \sigma.$$

2°) Dacă $i < j$ atunci inversiunile lui $\sigma = (i, j)$ sunt perechile: $(i, i+1)$, $(i, i+2)$, ..., (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+2, j)$, ..., $(j-1, j)$, deci σ are $2(j-i) - 1$ inversiuni. În concluzie σ este impară, deci $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze produsul $\sigma\tau$ în fiecare din cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Să se precizeze inversiunile și semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Să se scrie inversele permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Să se rezolve ecuația $\sigma x = \tau$ în următoarele cazuri:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție: Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; atunci $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se rezolve ecuația $\sigma x \tau = \theta$ în următoarele cazuri

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluție. Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că

$$x = \sigma^{-1} \theta \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e.$$

$$\text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Să se arate că permutarea σ^2 este pară, oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$ natural.

8. Să se arate că nu există permutări $\sigma \in S_4$ astfel încât $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Să se rezolve ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Să se determine toate permutările $x \in S_3$ care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și toate permutările $y \in S_4$ care

$$\text{comută cu } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. Să se precizeze numărul de transpoziții din S_n , $n \geq 2$.

13. Să se arate că: $(12)(34) = (34)(12)$ în S_n , $n \geq 4$.

14. Să se verifice că în S_n avem egalitățile:

$$\text{a) } (ij) = (1i)(1j)(1i); \quad \text{b) } (1i)(1j)(1i) = (1j)(1i)(1j); \quad \text{c) } (ij) = (1i)(ij)(1j), \text{ oricare ar fi } i, j \in \{2, 3, \dots, n\} \text{ cu } n \geq 3 \text{ și } i \neq j.$$

15. Fie $n \geq 2$ un număr natural. O submulțime nevidă H a lui S_n se numește **închisă** dacă $\sigma\tau \in H$ pentru orice permutări $\sigma, \tau \in H$.

Considerăm H o submulțime închisă a lui S_n și σ o permutare din H .

a) Să se arate că $\{\sigma^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

b) Să se demonstreze că există numerele întregi $k < \ell$ astfel încât $\sigma^k = \sigma^\ell$.

c) Să se arate că pentru orice permutare $\varphi \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $\varphi^p = e$.

d) Să se arate că $e \in H$.

e) Să se arate că dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

16. Să se calculeze σ^{2010} în următoarele cazuri:

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

17. Fie $\sigma \in S_{2006}$. Să se arate că $f: \{1, 2, \dots, 2006\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2006\}$, $f(i) = 2007 - \sigma(i)$ este o permutare din S_{2006} , având semnul opus lui σ .

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

Rezolvați:

1. Fie $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine paritatea lui σ .

b) Să se descompună σ în produs de transpoziții.

c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\sigma^k = e$.

2. Fie $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze σ^6 și τ^2 .

b) Să se rezolve ecuația $\sigma^{2004} \cdot x = \tau^{2006}$, $x \in S_4$.

c) Să se arate că ecuația $\sigma^{2004} \cdot x^2 = \tau^{2007}$ nu are soluții în S_4 .

3. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_{10}$ pentru care

$$\sum_{i=1}^{10} a_i a_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{10} a_i a_{\tau(i)}, \text{ oricare ar fi } \tau \in S_{10}.$$

Testul 2

Indicați răspunsul corect.

1. Câte inversiuni are permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 & \dots & 16 \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 15 & 2 & 4 & \dots & 16 \end{pmatrix}$.

a) 28; b) 29; c) 30; d) 32.

2. Câte soluții are în S_5 ecuația $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

a) 0; b) 1; c) 4; d) 8.

3. Câte permutări din S_5 comută cu permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$?

a) 8; b) 6; c) 4; d) 2.

NOȚIUNEA DE MATRICE MULȚIMI DE MATRICE

În diverse activități legate de reprezentare, analiza și optimizarea desfășurării anumitor procese de natură tehnică sau economică, în studiul probabilistic sau statistic al unor fenomene, în general în activități care presupun analiza unui număr însemnat de informații, apare necesitatea concentrării datelor în tablouri numite matrice.

În rezolvarea sistemelor liniare, matricele (tablourile coeficienților ecuațiilor) vor constitui principalul instrument de lucru. Prin introducerea operațiilor cu matrice, acestea vor putea fi privite ca „numere generalizate” cu ajutorul cărora vom contoriza soluțiile acestor sisteme.

Să considerăm următorul caz practic:

Situația vânzărilor de carte la o anumită editură, în patru orașe, într-o perioadă de timp determinată, este prezentată în tabelul de mai jos, în care sunt specificate orașul, tipul de carte și numărul exemplarelor vândute din fiecare tip.

Tipul de carte \ Orașul	Beletristică	Socio-politică	Știință	Tehnică	Didactică
Orașul A	120	15	42	10	400
Orașul B	90	21	10	5	212
Orașul C	87	10	25	11	308
Orașul D	410	12	14	17	197

Din acest tabel se pot extrage cu ușurință informații legate de vânzarea unui anumit tip de carte (prin citirea tabelului pe coloane) sau de situația generală a vânzărilor dintr-un anumit oraș (prin citirea tabelului pe linii).

În cazul în care ordonarea orașelor precum și ordonarea tipurilor de carte sunt fixate, situația vânzărilor poate fi prezentată sub forma următorului tabel matriceal:

$$\begin{pmatrix} 120 & 15 & 42 & 10 & 400 \\ 90 & 21 & 10 & 5 & 212 \\ 87 & 10 & 25 & 11 & 308 \\ 410 & 12 & 14 & 17 & 197 \end{pmatrix}$$

Poziția fiecărui număr din tabel este fixată de numărul liniei și al coloanei pe care se află. De exemplu, numărul 11 este situat pe linia 3 și coloana 4, deci reprezintă numărul de cărți tehnice vândute în orașul C.

Definiție

Fie \mathbb{C} mulțimea numerelor complexe și $m, n \in \mathbb{N}^*$. Se numește **matrice cu m linii și n coloane**, sau **matrice de tip (m, n)** o funcție

$$f : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dacă $a_{ij} \in \mathbb{C}$ reprezintă imaginea perechii (i, j) cu $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, atunci cele $m \cdot n$ imagini ale lui f se aranjează într-un tablou de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Această aranjare justifică denumirea funcției f de matrice cu m linii și n coloane. Cum orice funcție $f : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ este perfect determinată de tabloul imaginilor sale, vom numi matrice de tip (m, n) un tablou A de forma (1).

Numerele a_{ij} cu $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ se numesc elementele matricei A . Cum elementul a_{ij} situat pe linia i și coloana j ale tabloului A reprezintă imaginea perechii (i, j) rezultă că scrierea unei matrice este unică.

Înlocuind, în definiție, mulțimea \mathbb{C} cu una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} obținem noțiunea de matrice de tipul (m, n) peste \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și respectiv peste \mathbb{R} .

Liniile matricei A sunt mulțimile ordonate scrise „pe orizontală”:

$$\begin{aligned} L_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ L_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\dots\dots\dots \\ L_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}), \end{aligned}$$

iar coloanele matricei A sunt mulțimile ordonate „scrise pe verticală”:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dacă L_1, L_2, \dots, L_m sunt liniile lui A și C_1, C_2, \dots, C_n coloanele lui A atunci scriem: $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix}$ sau $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$.

O matrice de tip $(1, n)$ se numește **matrice linie**.

O matrice de tip $(m, 1)$ se numește **matrice coloană**.

O matrice de tip (n, n) se numește **matrice pătratică de ordin n** sau, mai scurt, **matrice de ordin n** .

Notăm: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) =$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) peste \mathbb{C} .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) =$ mulțimea matricelor de ordin n peste \mathbb{C} .

În mod analog definim mulțimile: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ și $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

O notație concentrată pentru matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sau, mai scurt, $A = (a_{ij})$. În

acest ultim caz, tipul matricei rezultă din precizarea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ sunt egale dacă sunt de același tip (deci $m = p$, $n = q$) și $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ atunci mulțimea ordonată $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se numește **diagonala principală** a lui A , iar mulțimea ordonată $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$ se numește **diagonala secundară** a lui A . Suma elementelor de pe diagonala principală a lui A se numește **urma matricei A** și se notează $\text{tr } A$. Deci $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci matricea obținută din A prin schimbarea „liniilor în coloane” și invers, se numește **transpusa lui A** și se notează A' . Se observă că $A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.

EXEMPLU: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$. Atunci $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

Operații cu Matrice

1. Adunarea matricelor

Considerăm următoarea situație practică:

O firmă de construcții deține două întreprinderi A și B , a căror structură de personal este prezentată în cele două tabele de mai jos, pe funcții și categorii de vârstă:

A	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	0	2	41
25 – 40 ani	12	4	11	79
40 – 65 ani	10	7	5	102

B	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	1	1	14
25 – 40 ani	8	5	10	83
40 – 65 ani	4	1	4	81

Structura angajaților firmei este dată de tabelul:

$A+B$	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	1	3	55
25 – 40 ani	20	9	21	162
40 – 65 ani	14	8	9	183

obținut prin adunarea numerelor din cele două tabele situate pe aceeași linie și aceeași coloană. Pe scurt, putem scrie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 41 \\ 12 & 4 & 11 & 79 \\ 10 & 7 & 5 & 102 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 14 \\ 8 & 5 & 10 & 83 \\ 4 & 1 & 4 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 55 \\ 20 & 9 & 21 & 162 \\ 14 & 8 & 9 & 183 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$. Matricea $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $C = (a_{ij} + b_{ij})$ se numește **suma** matricelor A și B și se notează $A + B$.

Operația prin care fiecărei perechi $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea $A + B$ se numește **adunarea** matricelor.

EXEMPLU: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

Observații:

1. Adunarea a două matrice se poate efectua numai dacă sunt de același tip (m, n) . Suma lor este tot o matrice de tipul (m, n) și, de aceea, spunem că adunarea matricelor este operație algebrică sau lege de compoziție pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ atunci $A+B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Proprietatea se păstrează dacă înlocuim mulțimea \mathbb{Z} cu una din mulțimile \mathbb{Q} sau \mathbb{R} .

Matricea de tip (m, n) ale cărei elemente sunt toate egale cu zero se numește **matricea nulă de tip (m, n)** și se notează $\mathbb{O}_{m, n}$.

În cazul în care $m = n$, această matrice se notează \mathbb{O}_n .

Pentru o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$, matricea „ $-A$ ” $= (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ se numește **opusa** matricei A .

Proprietățile adunării matricelor pe $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ sunt imediate și sunt evidențiate în următoarea propoziție:

Propoziție

Sunt adevărate proprietățile:

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (adunarea matricelor este asociativă).
- 2) $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (adunarea matricelor este comutativă).
- 3) $A + \mathbb{O}_{m, n} = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (matricea nulă este element neutru al adunării matricelor).
- 4) $A + (-A) = \mathbb{O}_{m, n}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ (orice matrice are o opusă față de adunare).

Demonstrația poate constitui o temă facilă și în același timp utilă. Cele patru proprietăți rămân adevărate în cazul înlocuirii mulțimii \mathbb{C} cu una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} .

Proprietățile anterioare conferă fiecăreia din mulțimile $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Q})$ și $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{Z})$, înzestrare cu adunarea, o „structură algebrică” numită grup abelian.

Regulile de calcul relative la adunarea matricelor sunt, datorită acestei structuri de grup abelian, identice cu cele de la adunarea numerelor.

De exemplu, asociativitatea adunării ne permite ca pentru $A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ și $p \in \mathbb{Z}$, să folosim notațiile:

$$pA = \begin{cases} \underbrace{A + A + \dots + A}_{p \text{ ori}}, & \text{dacă } p \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{O}_{m, n}, & \text{dacă } p = 0 \\ -(-pA), & \text{dacă } p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Următoarele egalități sunt adevărate:

$$(p + q)A = pA + qA \text{ și } p(qA) = (pq)A, \forall A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C}), p, q \in \mathbb{Z}.$$

Dacă pentru $A, B \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{C})$ notăm, ca la numere, matricea $A + (-B)$ cu $A - B$, atunci, într-o egalitate matriceală putem trece o matrice dintr-un membru în altul, cu „semn schimbat”. Adică $A + B = C \Leftrightarrow (A + B) + (-B) = C + (-B) \Leftrightarrow A + (B + (-B)) = C - B \Leftrightarrow A + \mathbb{O}_{m, n} = C - B \Leftrightarrow A = C - B$.

2. Înmulțirea matricelor cu scalari

Considerăm următoarea situație practică:

Un depozit de alimente aprovizionează magazinele X și Y , într-o săptămână, cu diverse cantități din alimentele a , b și c exprimate în kilograme, după tabelul de mai jos:

	a	b	c
X	1200	600	300
Y	1500	840	420

În urma scumpirii acestor alimente consumul pe fiecare din cele trei alimente a scăzut cu o treime. Noul tabel cu necesarul de aprovizionare al celor două magazine este:

	a	b	c
X	800	400	200
Y	1000	560	280

Ultimul tabel a fost obținut prin înmulțirea cu $\frac{2}{3}$ a elementelor tabelului inițial. Scriem pe scurt:

$$\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1200 & 600 & 300 \\ 1500 & 840 & 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 & 400 & 200 \\ 1000 & 560 & 280 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$. Dacă $A = (a_{ij})$, atunci matricea $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (\lambda a_{ij})$ se numește **produsul matricei A cu scalarul λ** și se notează λA . Operația prin care fiecărei perechi $(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea λA se numește **înmulțirea matricelor cu scalari**.

Dacă înlocuim în definiție mulțimea \mathbb{C} cu una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} obținem definiția înmulțirii cu scalari a matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

EXEMPLU: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 20 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$

Proprietățile înmulțirii cu scalari a matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt evidențiate de următoarea propoziție:

Propoziție

Sunt adevărate proprietățile:

- 1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- 2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- 3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- 4) $1A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- 5) $\lambda A = \mathbb{O}_{m,n} \Leftrightarrow \lambda = 0$ sau $A = \mathbb{O}_{m,n}$.

Demonstrația este imediată și reprezintă o temă utilă.

Proprietățile rămân adevărate dacă înlocuim mulțimea \mathbb{C} cu una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} .

În cazul în care K este una din mulțimile \mathbb{Q} , \mathbb{R} sau \mathbb{C} spunem că mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ înzestrată cu operația „internă” de adunare și cu operația „externă” de înmulțire cu scalari, este un K – spațiu vectorial.

Dacă $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ atunci matricea

$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_p A_p \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se numește **combinație liniară** a matricelor A_1, A_2, \dots, A_p cu coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. În cazul în care A_1, A_2, \dots, A_p sunt matrice linii, spunem că matricea B este **combinație liniară de linii**, iar când A_1, A_2, \dots, A_p sunt matrice coloane, spunem că matricea B este **combinație liniară de coloane**.

Aceste noțiuni vor fi utilizate în următoarele două capitole.

3. Înmulțirea matricelor

Considerăm următoarea situație practică:

Situația vânzării, pe categorii, a biletelor la un meci de fotbal este dată de următorul tabel linie:

Tribuna 0	Tribuna I	Tribuna a II-a	Peluză
2 000	7 000	10 000	5 000

Costul unui bilet este dat de următorul tabel coloană:

Tribuna 0	100
Tribuna I	80
Tribuna a II-a	70
Peluză	50

Suma obținută prin vânzarea biletelor este:

$$200\,000 + 560\,000 + 700\,000 + 250\,000 = 1\,710\,000 \text{ lei.}$$

Scriem pe scurt:

$$(2\,000 \quad 7\,000 \quad 10\,000 \quad 5\,000) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix} = 20\,000 \cdot 100 + 7\,000 \cdot 80 + 10\,000 \cdot 70 + 5\,000 \cdot 50 =$$

$$= 1\,710\,000.$$

În definiția care urmează vom privi un număr din \mathbb{C} ca o matrice de tip $(1, 1)$ peste \mathbb{C} .

Definiție

1. Fie $L = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ o matrice linie și $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ o matrice coloană. Numărul

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{C}$ se numește **produsul dintre matricea linie L și matricea coloană C** (în această ordine) și se notează LC .

2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice cu liniile L_1, L_2, \dots, L_m și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ o matrice cu coloanele C_1, C_2, \dots, C_p .

Atunci matricea $C = \begin{pmatrix} L_1 C_1 & L_1 C_2 & \dots & L_1 C_p \\ L_2 C_1 & L_2 C_2 & \dots & L_2 C_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_m C_1 & L_m C_2 & \dots & L_m C_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ se numește **produsul matricelor A și B** (în

această ordine) și se notează AB .

Operația prin care fiecărei perechi $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea AB se numește **înmulțirea matricelor**.

Se spune că produsul AB se obține după regula de înmulțire „linie cu coloană”.

EXEMPLU: Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz + cu & ay + bt + cv \\ dx + ez + fu & dy + et + fv \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Observații

1. Putem efectua produsul AB (în această ordine) numai dacă numărul coloanelor lui A este egal cu numărul liniilor lui B .

2. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ atunci $AB = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ unde $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$,

$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $\forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Reținem: matrice $(m, n) \cdot$ matrice $(n, p) =$ matrice (m, p) .

3. Punctul 1 din definiție este un caz particular al punctului 2 deoarece am convenit să privim un număr din \mathbb{C} ca o matrice de tip $(1, 1)$ peste \mathbb{C} .

4. Dacă înlocuim în definiție mulțimea \mathbb{C} cu una din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} obținem definiția înmulțirii matricelor peste \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și respectiv \mathbb{R} .

5. Este posibil să putem efectua produsul $A \cdot B$, iar produsul $B \cdot A$ să nu aibă sens. De exemplu, dacă $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ atunci $A \cdot B$ are sens, iar $B \cdot A$ nu are sens, deoarece numărul coloanelor lui B nu este egal cu numărul liniilor lui A .

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ atunci putem efectua produsele $A \cdot B$ și $B \cdot A$, dar în general $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Mai mult, ele pot fi de tipuri diferite deoarece $AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ și $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Pentru orice două matrice de ordin n putem efectua produsul lor iar dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Spunem că înmulțirea este operație algebrică sau lege de compoziție pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

În cele ce urmează vom pune în evidență proprietățile înmulțirii matricelor. Anumite proprietăți (existența elementului neutru, inversabilitatea matricelor, comutativitatea – proprietăți care necesită efectuarea de produse de tip AB și BA) nu pot fi studiate decât în mulțimi de matrice pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Asociativitatea înmulțirii matricelor ca și distributivitatea înmulțirii matricelor față de adunare vor fi studiate într-un context mai larg, și anume acela în care au sens toate produsele și sumele considerate. Pentru aceasta avem nevoie de o leamnă, care stabilește o proprietate a sumelor duble.

Lemă. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Atunci $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)$.

Demonstrație. Fie S suma elementelor matricei A . Deoarece suma elementelor pe linia L_i este $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ rezultă

că $S = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$. Cum suma elementelor de pe coloana C_j este

$\sum_{i=1}^m a_{ij}$ rezultă că $S = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)$ și egalitatea a fost demonstrată.

Propoziție: Înmulțirea matricelor are următoarele proprietăți:

1). $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, (înmulțirea matricelor este asociativă).

2). $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, B și $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;

3). $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, B și $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{C})$;

(înmulțirea este distributivă față de adunare la stânga și la dreapta).

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Demonstrație

1). Dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{k\ell})$; $AB = (d_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, $BC = (e_{j\ell}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, $(AB) \cdot C =$

$= (f_{i\ell}) \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$ iar $A(BC) = (g_{i\ell}) \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, atunci $f_{i\ell} = \sum_{k=1}^p d_{ik}c_{k\ell} =$

$= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{k\ell} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}c_{k\ell} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij}b_{jk}c_{k\ell} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{k\ell} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_{j\ell} = g_{i\ell}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots,$

$m\}$ și $\ell \in \{1, 2, \dots, q\}$ și egalitatea este demonstrată.