Matematică

Cartea elevului

Clasa a VIII-a

Marius Perianu
Dana Heuberger
Gabriel Popa
Cătălin Stănică

art Klett

Ce propune această carte

Lucrarea este împărțită în **cinci unități** care acoperă integral conținutul prevăzut de programa școlară. Lecțiile care compun o unitate sunt prezentate în mod coerent, unitar, într-un stil consecvent.

Fiecare lecție debutează cu rubrica Utilitate, în cadrul căreia se prezintă beneficiul pe care îl prezintă cunoașterea noțiunilor predate. Această rubrică este urmată de o problemă practică, pe baza căreia se introduc noile concepte. Conceptele sunt transpuse apoi într-un limbaj matematic care echilibrează nivelul descriptiv cu rigoarea specifică matematicii. Noțiunile noi sunt însoțite de exemple semnificative, comentarii și aplicații.

Cartea acordă o atenție sporită gândirii critice și consolidării competențelor de calcul numeric formate în clasele anterioare, prin zone dedicate, încurajând în același timp activitățile de grup, independența în gândire și dezvoltarea încrederii în sine. Evaluarea se realizează prin forme și instrumente diversificate, orientate spre formarea și dezvoltarea competențelor matematice.

78 U3 **Funcții**

Lecția 2: Funcția de forma $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$

Cuvinte cheie
- funcție afină
- domeniu de valori
- dreaptă
- formulă analitică
- produs cartezian
- reprezentare geometrică

Utilitate Procesele din viața de zi cu zi, sau fenomenele din natură, se desfășoară deseori liniar (prezintă creșteri sau descreșteri constante la creșteri constante ale variabilelor), cel puțin între anumite limite. Un atelier de cofetărie care produce câte 200 de prăjituri pe oră, după două ore va realiza 400 de prăjituri, după 3 ore, 600 de prăjituri, după 4 ore, 800 de prăjituri etc. (numărul de prăjituri crește constant).

La fel, dacă un rezervor de 8 000 de litri de apă se golește printr-o conductă cu câte 40 de litri pe minut, după două minute mai conține $8\,000 - 2 \cdot 40$ litri, după 5 minute, $8\,000 - 5 \cdot 40$ litri; volumul de apă din rezervor descrește constant, odată cu fiecare minut scurs.

Multe dintre situațiile cotidiene pot fi descrise prin astfel de procese liniare, pe care le vom modela cu ajutorul funcțiilor, fie pentru a rezolva probleme concrete, fie pentru a face estimări (predicții) asupra proceselor/fenomenelor viitoare.

2.1. Studiu de caz: funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = ax, a \neq 0$, definită pe o mulțime finită

Situație problemă Robotul industrial din figura alăturată produce două piese pe minut. Un ciclu de producție durează 10 minute, după care robotul se oprește pentru colectarea pieselor produse; apoi procesul se reia cu un nou ciclu. Câte piese produce robotul după trei minute? Dar după cinci minute? Dar într-un ciclu de producție?

Următorul tabel arată numărul de piese produse într-un ciclu de producție complet (10 minute), măsurând din minut în minut.

durata (minute)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
număr piese	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Observăm că numărul de piese produse după un număr întreg x de minute, $0 \leq x \leq 10$, este $2x$.

Definind o funcție cu ajutorul tabelului de mai sus, putem spune că numărul de piese obținute de-a lungul unui ciclu de producție este descris de funcția:

$f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x,$

pe care am reprezentat-o grafic în figura 1.

Intuitiv, observăm că punctele graficului sunt coliniare (aspect confirmat în figura 2), iar dreapta care conține punctele graficului trece prin origine.

Figura 1

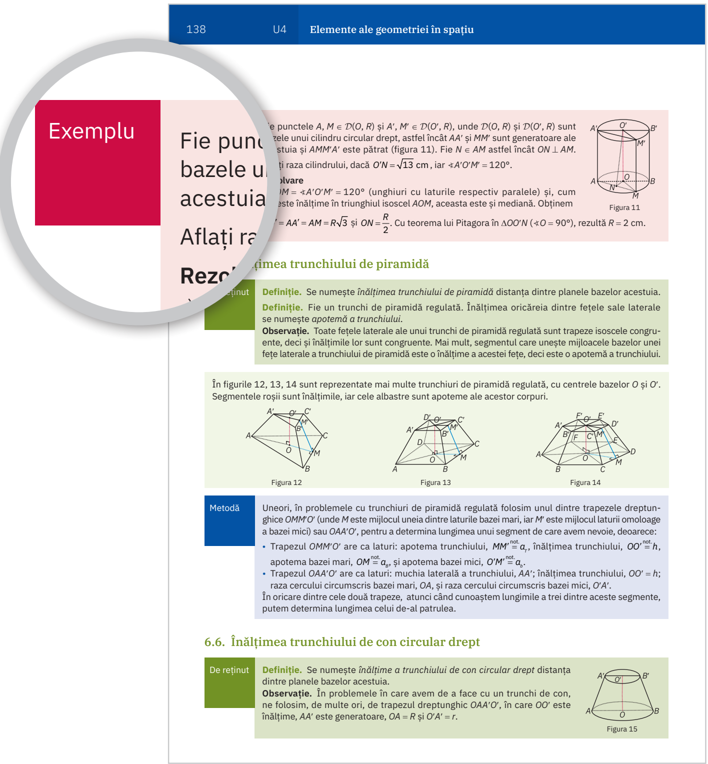
Figura 2

De reținut În general, dacă $a \neq 0$ este un număr real și D este o mulțime finită de numere reale, atunci reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = ax$, este o mulțime de puncte coliniare, aflate pe o dreaptă care trece prin originea sistemului de coordonate.

Structura unei lecții

Cuvinte-cheie – noțiunile cele mai importante care apar în lecție
Utilitate – exemple din viața de zi cu zi și de la alte obiecte de studiu, care demonstrează beneficiul pe care îl prezintă cunoașterea noțiunilor predate
Situație-problemă – problemă practică pe baza căreia se introduc noile concepte
De reținut – secvență în care sunt teoretizate *conținuturile noi* aflate în substratul situației-problemă propuse
Exemple – ilustrarea teoriei expuse anterior
Observații – completarea informațiilor științifice și aspecte complementare noțiunilor teoretice prezentate
Mate practică – activități de învățare pentru formarea/dezvoltarea competențelor specifice și valorificarea experienței concrete a elevului în raport cu cotidianul
Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative – reintegrarea conținuturilor noi, uneori rezolvate în mai multe moduri pentru a permite analogii și diferențieri
Probleme propuse – aplicații de natură teoretică sau practic-aplicativă
Autoevaluare – evaluarea de către elevii înșiși a cunoștințelor dobândite în cadrul lecției, cu ajutorul punctajelor și al soluțiilor
Cultură matematică – informații de cultură generală care sunt strâns legate de subiectul lecției

U1 Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$



138 U4 **Elemente ale geometriei în spațiu**

Exemplu

Fie punc
bazele u
acestuia

Aflați ra

Rezo

…e punctele $A, M \in \mathcal{D}(O, R)$ și $A', M' \in \mathcal{D}(O', R)$, unde $\mathcal{D}(O, R)$ și $\mathcal{D}(O', R)$ sunt …zele unui cilindru circular drept, astfel încât AA' și MM' sunt generatoare ale …stuia și $AMM'A'$ este pătrat (figura 11). Fie $N \in AM$ astfel încât $ON \perp AM$. …ți raza cilindrului, dacă $O'N = \sqrt{13}$ cm, iar $\sphericalangle A'O'M' = 120°$.

…olvare

…$OM = \sphericalangle A'O'M' = 120°$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele) și, cum …este înălțime în triunghiul isoscel AOM, aceasta este și mediană. Obținem …$= AA' = AM = R\sqrt{3}$ și $ON = \frac{R}{2}$. Cu teorema lui Pitagora în $\Delta OO'N$ ($\sphericalangle O = 90°$), rezultă $R = 2$ cm.

Figura 11

…țimea trunchiului de piramidă

…ținut

Definiție. Se numește *înălțimea trunchiului de piramidă* distanța dintre planele bazelor acestuia.

Definiție. Fie un trunchi de piramidă regulată. Înălțimea oricăreia dintre fețele sale laterale se numește *apotemă a trunchiului*.

Observație. Toate fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele congruente, deci și înălțimile lor sunt congruente. Mai mult, segmentul care unește mijloacele bazelor unei fețe laterale a trunchiului de piramidă este o înălțime a acestei fețe, deci este o apotemă a trunchiului.

În figurile 12, 13, 14 sunt reprezentate mai multe trunchiuri de piramidă regulată, cu centrele bazelor O și O'. Segmentele roșii sunt înălțimile, iar cele albastre sunt apoteme ale acestor corpuri.

Figura 12 Figura 13 Figura 14

Metodă

Uneori, în problemele cu trunchiuri de piramidă regulată folosim unul dintre trapezele dreptunghice $OMM'O'$ (unde M este mijlocul uneia dintre laturile bazei mari, iar M' este mijlocul laturii omoloage a bazei mici) sau $OAA'O'$, pentru a determina lungimea unui segment de care avem nevoie, deoarece:

- Trapezul $OMM'O'$ are ca laturi: apotema trunchiului, $MM' \overset{\text{not.}}{=} a_T$, înălțimea trunchiului, $OO' \overset{\text{not.}}{=} h$, apotema bazei mari, $OM \overset{\text{not.}}{=} a_B$, și apotema bazei mici, $O'M' \overset{\text{not.}}{=} a_b$.
- Trapezul $OAA'O'$ are ca laturi: muchia laterală a trunchiului, AA'; înălțimea trunchiului, $OO' = h$; raza cercului circumscris bazei mari, OA, și raza cercului circumscris bazei mici, $O'A'$.

În oricare dintre cele două trapeze, atunci când cunoaștem lungimile a trei dintre aceste segmente, putem determina lungimea celui de-al patrulea.

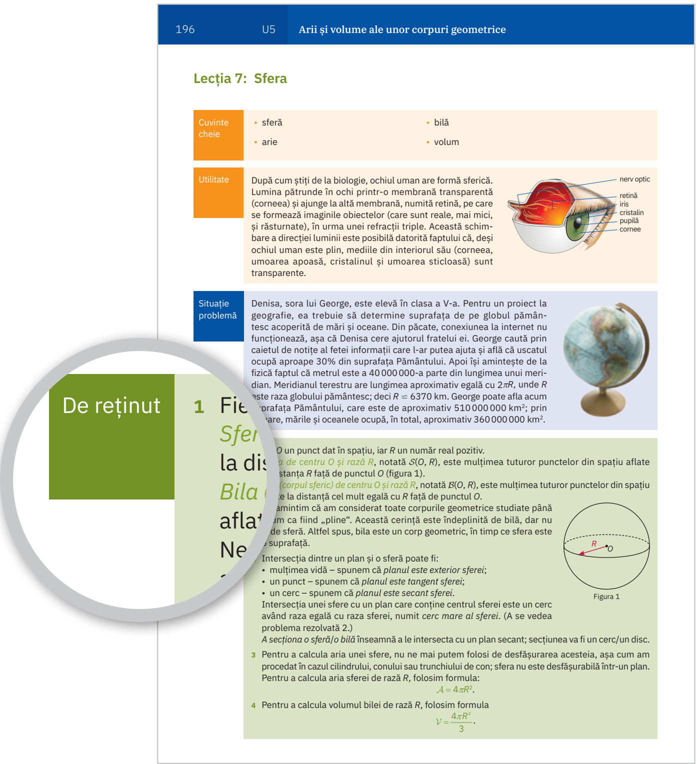
6.6. Înălțimea trunchiului de con circular drept

De reținut

Definiție. Se numește *înălțime a trunchiului de con circular drept* distanța dintre planele bazelor acestuia.

Observație. În problemele în care avem de a face cu un trunchi de con, ne folosim, de multe ori, de trapezul dreptunghic $OAA'O'$, în care OO' este înălțime, AA' este generatoare, $OA = R$ și $O'A' = r$.

Figura 15



196 U5 **Arii și volume ale unor corpuri geometrice**

Lecția 7: Sfera

Cuvinte cheie

- sferă
- arie
- bilă
- volum

Utilitate

După cum știți de la biologie, ochiul uman are formă sferică. Lumina pătrunde în ochi printr-o membrană transparentă (corneea) și ajunge la altă membrană, numită retină, pe care se formează imaginile obiectelor (care sunt reale, mai mici, și răsturnate), în urma unei refracții triple. Această schimbare a direcției luminii este posibilă datorită faptului că, deși ochiul uman este plin, mediile din interiorul său (corneea, umoarea apoasă, cristalinul și umoarea sticloasă) sunt transparente.

Situație problemă

Denisa, sora lui George, este elevă în clasa a V-a. Pentru un proiect la geografie, ea trebuie să determine suprafața de pe globul pământesc acoperită de mări și oceane. Din păcate, conexiunea la internet nu funcționează, așa că Denisa cere ajutorul fratelui ei. George caută prin caietul de notițe al fetei informații care l-ar putea ajuta și află că uscatul ocupă aproape 30% din suprafața Pământului. Apoi își amintește de la fizică faptul că metrul este a 40 000 000-a parte din lungimea unui meridian. Meridianul terestru are lungimea aproximativ egală cu $2\pi R$, unde R …este raza globului pământesc; deci $R \simeq 6370$ km. George poate afla acum …prafața Pământului, care este de aproximativ 510 000 000 km²; prin …are, mările și oceanele ocupă, în total, aproximativ 360 000 000 km².

De reținut

1 Fie
Sfer
la dis
Bila
aflat
Ne

…O un punct dat în spațiu, iar R un număr real pozitiv.
…*a de centru O și rază R*, notată $\mathcal{S}(O, R)$, este mulțimea tuturor punctelor din spațiu aflate …stanța R față de punctul O (figura 1).
…*(corpul sferic) de centru O și rază R*, notată $\mathcal{B}(O, R)$, este mulțimea tuturor punctelor din spațiu …te la distanță cel mult egală cu R față de punctul O.
…amintim că am considerat toate corpurile geometrice studiate până …um ca fiind „pline“. Această cerință este îndeplinită de bilă, dar nu …de sferă. Altfel spus, bila este un corp geometric, în timp ce sfera este … suprafață.

Intersecția dintre un plan și o sferă poate fi:

- mulțimea vidă – spunem că *planul este exterior sferei*;
- un punct – spunem că *planul este tangent sferei*;
- un cerc – spunem că *planul este secant sferei*.

Intersecția unei sfere cu un plan care conține centrul sferei este un cerc având raza egală cu raza sferei, numit *cerc mare al sferei*. (A se vedea problema rezolvată 2.)

A secționa o sferă/o bilă înseamnă a le intersecta cu un plan secant; secțiunea va fi un cerc/un disc.

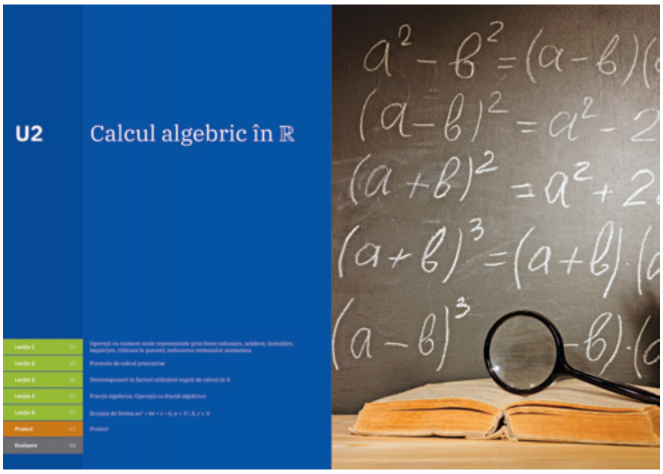
Figura 1

3 Pentru a calcula aria unei sfere, nu ne mai putem folosi de desfășurarea acesteia, așa cum am procedat în cazul cilindrului, conului sau trunchiului de con; sfera nu este desfășurabilă într-un plan. Pentru a calcula aria sferei de rază R, folosim formula:

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2.$$

4 Pentru a calcula volumul bilei de rază R, folosim formula

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$



U2 Calcul algebric în ℝ

U3 Funcții

U4 Elemente ale geometriei în spațiu

U5 Arii și volume ale unor corpuri geometrice

Cuprins

Competențe generale și competențe specifice

Competențe vizate

1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1

1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2

1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3

1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4

1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5

Competențe generale

1 Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

2 Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

3 Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1 Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime

1.2 Identificarea componentelor unei expresii algebrice

1.3 Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date

1.4 Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date

1.5 Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

2.1 Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei

2.2 Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere

2.3 Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule

2.4 Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date

2.5 Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

3.1 Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$

3.2 Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor

3.3 Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora

3.4 Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor

3.5 Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

4.1 Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații

4.2 Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric

4.3 Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale

4.4 Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice

4.5 Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

5.1 Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații

5.2 Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric

5.3 Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar

5.4 Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice

5.5 Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

6.1 Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații

6.2 Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

6.3 Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală

6.4 Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

6.5 Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

U1

Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

Lecția 1: Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

Cuvinte cheie

- mulțime
- reuniune
- proprietate comună
- apartenență
- intersecție
- incluziune

Utilitate

În clasele anterioare am considerat, fără a da o definiție riguroasă, că o mulțime este o colecție bine precizată de obiecte (numite elemente), privită ca un întreg.

Activitatea umană, în toate formele sale, necesită adesea nu doar gruparea în mulțimi a unor obiecte, idei, acțiuni sau fenomene, ci și clasificarea acestora după diferite criterii.

Un exemplu la îndemână: observând lumea înconjurătoare, putem distinge imediat între *plante* și *animale*, deci putem considera mulțimea plantelor (regnul vegetal) și mulțimea animalelor (regnul animal). Analizând animalele după un anumit criteriu, de exemplu, după faptul dacă au sau nu coloană vertebrală, constatăm că regnul animal este constituit din mulțimea animalelor *vertebrate* și mulțimea animalelor *nevertebrate*.

Matematic, un proces de clasificare, realizat pe baza unui criteriu, conduce la definirea unei mulțimi de obiecte cu o proprietate comună (criteriul dat).

1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

Situație problemă

Echipa de baschet a școlii este formată din 12 elevi. Patru dintre ei ne zâmbesc din figura alăturată, îmbrăcați în echipamentul albastru al echipei.

Mulțimea B, a componenților echipei, poate fi scrisă enumerând efectiv elementele sale, adică menționând numele tuturor elevilor: Dan, Adi, Ion, Toni și așa mai departe.

Mulțimea B poate fi identificată și în alt mod, ținând seama că fiecare element al ei are calitatea de membru al echipei de baschet. Aceasta este o proprietate caracteristică tuturor elementelor mulțimii B și numai lor, nefiind verificată de elementele care nu aparțin mulțimii B (de exemplu, de Alin).

Mulțimea B se poate scrie și astfel:

$$B = \{x \mid x \text{ este membru al echipei de baschet a școlii}\}.$$

Citim: B este mulțimea elementelor x, cu proprietatea că x este membru al echipei de baschet a școlii.

De reținut

Dacă elementele unei mulțimi A au o proprietate comună, notată cu p, specifică lor și numai lor, mulțimea A se poate defini și astfel:

$$A = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: A este mulțimea formată din elementele x care au proprietatea p.

Proprietatea p trebuie formulată astfel încât să permită identificarea exactă a elementelor mulțimii (și numai a acestora). De exemplu, considerând mulțimea $A = \{x \mid x \text{ este cifră arabă}\}$, putem afirma, fără echivoc, că $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

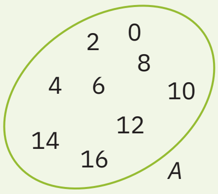
Nu orice mulțime se poate scrie însă folosind o proprietate comună a elementelor. De exemplu, mulțimea $T = \{7, 11, \text{elefant}, \text{contrabas}, \Delta, \bigcirc\}$ nu poate fi definită pe baza unei proprietăți specifice elementelor sale.

Observații

1 Pentru definirea unei mulțimi, se pot utiliza și două sau mai multe proprietăți pe care le verifică elementele sale.

Considerând mulțimea A din figura alăturată, orice element $x \in A$ are proprietățile: x este număr natural, x este par, $x \leq 16$. Scriem:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \text{ este număr par},\ x \leq 16\}.$$



Se observă că A poate fi definită și astfel: $A = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{N},\ k \leq 8\}$.

2 Dacă elementele mulțimii A aparțin unui domeniu dat (altfel spus, mulțimea A este submulțime a unei mulțimi definite anterior), putem indica acest lucru înainte de bara verticală.
De exemplu, pentru a defini mulțimea A a numerelor naturale cel mult egale cu 4, vom scrie:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}, \text{ în loc de } A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leq 4\}.$$

3 Pentru simplificarea scrierii, în special în cazul mulțimilor de numere reale, dacă elementele se pot determina printr-o formulă de calcul (au o formă comună), se poate scrie această formulă (proprietatea comună) înainte de bara verticală.
De exemplu, pentru a indica mulțimea numerelor naturale care dau restul 2 la împărțirea cu 6 (adică mulțimea numerelor de forma $6k + 2$, unde $k \in \mathbb{N}$), în loc de $A = \{x \mid x = 6k + 2,\ k \in \mathbb{N}\}$, vom scrie, mai simplu, $A = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

4 Pentru o mulțime finită, având un număr relativ mic de elemente, enumerarea elementelor între acolade sau utilizarea unei diagrame Venn-Euler oferă o imagine rapidă asupra mulțimii date. În schimb, mulțimile infinite se scriu indicând forma generală a elementelor care le compun. Astfel, mulțimea multiplilor întregi ai unui număr natural n se scrie: $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Mulțimea numerelor raționale se scrie $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$ sau $\mathbb{Q} = \left\{ \pm\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exemple

1 **Scrierea unei mulțimi date identificând o proprietate comună a elementelor**

Considerăm mulțimile:

a $A = \{1, 3, 9, 27, 81\}$; **b** $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$; **c** $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Vom identifica, pe rând, câte o proprietate comună a elementelor fiecărei mulțimi.

a Se observă că $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$ și $81 = 3^4$. Așadar:

$$A = \{x \mid x = 3^k,\ k \in \mathbb{N},\ k \leq 4\} = \{3^k \mid k \in \mathbb{N},\ k \leq 4\}.$$

b Numerele 0, 1, 4, 9, 16, 25 și 36 sunt pătrate perfecte, mai precis pătratele numerelor 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6. În consecință:

$$B = \{x \mid x = k^2,\ k \in \mathbb{N},\ k \leq 6\}.$$

c Elementele mulțimii sunt numerele întregi mai mari decât -5 și mai mici decât 5 (sau mai mari sau egale cu -4 și mai mici sau egale cu 4). Ca urmare:

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}.$$

Folosind proprietățile modulului, putem scrie și $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ sau $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$.

2 **Enumerarea elementelor unei mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor**

Fie mulțimea $D = \{k + k^2 \mid k \in \mathbb{N},\ 2 \leq k \leq 5\}$. Elementele sale sunt numerele naturale x care se obțin prin adunarea unui număr natural k, $2 \leq k \leq 5$, cu pătratul său. Astfel, avem:

- pentru $k = 2$: $x = 2 + 2^2 = 6$;
- pentru $k = 3$: $x = 3 + 3^2 = 12$;
- pentru $k = 4$: $x = 4 + 4^2 = 20$;
- pentru $k = 5$: $x = 5 + 5^2 = 30$.

În concluzie, $D = \{6, 12, 20, 30\}$.

3 **Studiul apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor**

Considerăm mulțimile $A = \{x \mid x = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x = 2t + 1,\ t \in \mathbb{N}\}$. Se pun problemele:

a Care dintre numerele naturale 122, 321, 305 aparțin mulțimii A, respectiv mulțimii B?

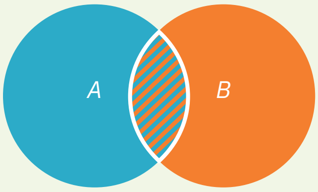
b Care sunt elementele comune mulțimilor A și B?

a Observăm că $122 = 3 \cdot 40 + 2$, deci $122 \in A$. La fel, $127 = 2 \cdot 63 + 1$, adică $127 \in B$.
Presupunând că $122 \in B$, ar trebui să existe $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $2t + 1 = 122$, absurd, deoarece $2t + 1$ este număr impar, iar 122 este par. Așadar, $122 \notin B$.
Analog, presupunând că $321 \in A$, ar rezulta că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $3k + 2 = 321$, adică $3k = 319$, de unde $k = \frac{319}{3} = 106\frac{1}{3}$, care nu este număr natural. Rezultă că $321 \notin A$.
Deoarece $305 = 3 \cdot 101 + 2 = 2 \cdot 152 + 1$, deducem că $305 \in A$ și $305 \in B$, adică $305 \in A \cap B$.

b Fie x un element comun mulțimilor A și B, ales arbitrar. Atunci există $k, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = 3k + 2$ și $x = 2t + 1$, deci $2t = 3k + 1$. Ca urmare, $3k + 1$ este număr natural par, deci k este impar, adică are forma $2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $x = 3k + 2 = 3(2p + 1) + 2 = 6p + 5$.
Așadar, dacă $x \in A \cap B$, atunci x are forma $6p + 5$, $p \in \mathbb{N}$. Observând că:
$$6p + 5 = 3 \cdot (2p + 1) + 2 \in A \quad \text{și} \quad 6p + 5 = 3 \cdot (3p + 2) + 1 \in B,$$
rezultă că orice număr de forma $6p + 5$, $p \in \mathbb{N}$ se află atât în A cât și în B, deci $A \cap B = \{x \mid x = 6p + 5, p \in \mathbb{N}\}$.

1.2. Reuniunea, intersecția și diferența a două mulțimi. Aplicații

Observație



Ne reamintim că intersecția a două mulțimi A și B, notată prin $A \cap B$, este mulțimea formată cu elementele comune ale mulțimilor A și B.

Putem defini mulțimea $A \cap B$ folosind proprietatea elementelor sale de a aparține atât mulțimii A, cât și mulțimii B. Așadar:
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$
Analog, elementele reuniunii $A \cup B$ au proprietatea că aparțin fie lui A, fie lui B, deci:
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$
Similar, putem defini și diferența a două mulțimi printr-o proprietate comună a elementelor:
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \qquad \text{sau} \qquad B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ și } x \notin A\}.$$

Investigație

Se împart elevii în patru grupe. În fiecare grupă se alege un purtător de cuvânt.
Fiecare grupă primește o coală de carton pe care sunt scrise mulțimile:

Grupa 1: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x \le 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \le x \le 15\}$.

Grupa 2: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 16 \le x \le 21\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \le x \le 24\}$.

Grupa 3: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 8\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \le x \le 14\}$.

Grupa 4: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x \le 13\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 < x \le 18\}$.

Cerințe comune:

1 Scrieți mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și reprezentați-le cu ajutorul diagramelor.

2 Determinați mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

3 Scrieți fiecare dintre mulțimile $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$ folosind o proprietate comună a elementelor, exprimată, acolo unde este posibil, sub forma unei duble inegalități.

Cerință specifică:

4 Determinați mulțimile $E \cap F$ și $E \cup F$, unde $E = \{x \in \mathbb{N} \mid a \le x \le b\}$ și $F = \{x \in \mathbb{N} \mid c \le x \le d\}$, iar a, b, c, d sunt numere naturale care îndeplinesc condiția:

grupa 1: $a < c < b < d$;
grupa 2: $a < b < d < c$;
grupa 3: $a < b < c < d$;
grupa 4: $a < c < d < b$.

Cerințele se rezolvă pe coala de carton primită, în timp de 15 minute. După îndeplinirea sarcinilor, fiecare purtător de cuvânt expune în fața clasei activitățile efectuate și modul de rezolvare.

Se dezbat rezultatele obținute la cerința specifică, în funcție de ordonarea numerelor a, b, c, d. Suplimentar, se studiază cazurile în care unele dintre numerele a, b, c, d sunt egale.

Probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1 Mulțimea $\mathcal{F}$ conține triunghiuri, cercuri și pătrate, care pot fi pline sau goale, colorate cu albastru, roșu sau cu verde (figura 1). Reprezentați cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler mulțimile:

a $A=\{x\in\mathcal{F}\mid x \text{ este triunghi}\}$; **b** $B=\{y\in\mathcal{F}\mid y \text{ este verde}\}$;

c $C=\{z\in\mathcal{F}\mid z \text{ este plin}\}$; **d** $D=\{u\in\mathcal{F}\mid u\in A \text{ și } u\in B \text{ și } u\in C\}$.

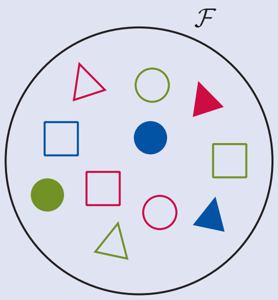
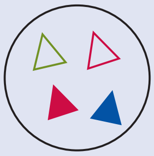


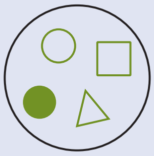
Figura 1

Rezolvare

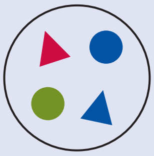
a



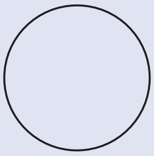
b



c



d



2 Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor:

a $A=\{40, 31, 22, 13\}$; **b** $B=\{6, 4\sqrt{5}, 5\sqrt{6}, 6\sqrt{7}, 14\sqrt{2}\}$;

c $C=\{10, 15, 20,..., 95\}$; **d** $D=\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Rezolvare

a Elementele mulțimii A sunt toate numerele de două cifre care au suma cifrelor egală cu 4: $A=\{\overline{ab}\mid a+b=4\}$. Putem scrie mulțimea A și sub forma: $A=\{9n+4\mid n\in\mathbb{N}, 1\le n\le 4\}$.

b Numerele $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{6}$, $6\sqrt{7}$ au forma $n\sqrt{n+1}$, unde $n\in\{4, 5, 6\}$. Observând că $6=3\sqrt{4}$ și $14\sqrt{2}=7\sqrt{8}$, putem scrie $B=\{n\sqrt{n+1}\mid n\in\mathbb{N}, 3\le n\le 7\}$.

c Elementele mulțimii C sunt toate numerele divizibile cu 5 formate din două cifre. Utilizând faptul că orice număr întreg divizibil cu 5 este de forma $5k$, unde $k\in\mathbb{Z}$, obținem $C=\{5k\mid k\in\mathbb{N}, 2\le k\le 19\}$.

d Mulțimea D conține toți divizorii întregi ai lui 4, deci $D=\{n\in\mathbb{Z}\mid 4 \vdots n\}$.

3 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a P_1: $\sqrt{7}\in\{x\mid 1<x\le 3, x\in\mathbb{R}\}$; **b** P_2: $-4\notin\{x\mid |x|\le 6, x\in\mathbb{N}\}$; **c** P_3: $237\in\{x\mid x=k^2, k\in\mathbb{N}\}$.

Rezolvare

a Propoziția P_1 este adevărată, deoarece $1=\sqrt{1}<\sqrt{7}<\sqrt{9}=3$.

b Deoarece $\{x\in\mathbb{N}\mid |x|\le 6, x\in\mathbb{N}\}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, propoziția P_2 este adevărată.

c Deoarece $15^2<237<16^2$, numărul 237 nu este pătrat perfect. P_3 este o propoziție falsă.

4 Arătați că elementele mulțimii $C=\{x\mid x=6k+13, k\in\mathbb{N}\}$ dau restul 1 la împărțirea cu 3.

Rezolvare

Un element oarecare al mulțimii C este de forma $x=6k+13=3\cdot 2k+3\cdot 4+1=3\cdot(2k+4)+1$.

Din teorema împărțirii cu rest, rezultă că restul împărțirii lui x la 3 este 1.

5 Se consideră mulțimile $A=\{x\mid 7<x\le a, x, a\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{x\mid x \vdots 5, x\in\mathbb{N}\}$. Determinați toate numerele naturale a pentru care mulțimea $A\cap B$ are 20 de elemente.

Rezolvare

Elementele comune celor două mulțimi sunt multipli de 5 mai mari ca 7, cel mai mic element comun fiind $10=5\cdot 2$. Cele 20 de elemente ale mulțimii $A\cap B$ sunt 20 de multipli consecutivi ai lui 5 începând cu 10, adică numerele de la $5\cdot 2$ la $5\cdot 21$. Așadar, $A\cap B=\{10, 15, 20,..., 105\}$, deci $a\ge 105$. Presupunând că $a\ge 110$, ar rezulta că $110\in A\cap B$, adică $A\cap B$ ar avea cel puțin 21 de elemente. În concluzie, $a<110$, de unde rezultă că $a\in\{105, 106, 107, 108, 109\}$.

Probleme propuse

1 Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid -3<x\le 4\}$ și $B=\{z\in\mathbb{Z} \mid |z|\le 2\}$.
- **a** Reprezentați mulțimile A și B cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.
- **b** Reprezentați elementele mulțimii $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$ într-un sistem de axe ortogonale xOy.

2 Scrieți mulțimile de mai jos folosind o proprietate comună a elementelor lor:
a $A=\{0, 7, 14, 21, 28\}$; **b** $B=\{0, 4, 8, 12, 16, 20,...\}$; **c** $C=\{1, 5, 9, 13, 17, 21,...\}$.

3 Fie mulțimea $M=\left\{-2,(6); 0; 2\sqrt{3}; \pi; -\dfrac{15}{5}; \sqrt{\dfrac{9}{4}}\right\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:
a $A=\{x\in M \mid x\ge 0\}$; **b** $B=\{x\in M \mid x\notin\mathbb{Q}\}$; **c** $C=\{x\in M \mid x\in\mathbb{Z}\}$; **d** $D=\{x\in M \mid x\le -3\}$.

4 Se consideră mulțimile $A=\{x \mid x=6k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}$ și $B=\{x \mid x=3k,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
- **a** Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.
- **b** Verificați dacă numerele 112, 204 și 333 aparțin celor două mulțimi.
- **c** Arătați că $A\subset B$ și $B\not\subset A$.

5 Se dau mulțimile $A=\left\{\dfrac{x}{x+1} \,\middle|\, x\in\mathbb{N}^*,\ x\le 20\right\}$ și $B=\left\{\dfrac{x+1}{x+3} \,\middle|\, x\in\mathbb{N},\ x\le 20\right\}$.
- **a** Stabiliți câte elemente au mulțimile A și B.
- **b** Comparați produsul elementelor mulțimii A cu produsul elementelor mulțimii B.

6 Determinați mulțimile:
- **a** $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid xy+5=0\}$;
- **b** $B=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 2x+5y=40\}$;
- **c** $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+2y=9 \text{ și } 2x-y=8\}$;
- **d** $D=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid xy+3x+3y=12\}$.

7 Determinați numărul elementelor mulțimilor:
a $A=\{\overline{abc} \mid a+c=3\}$; **b** $B=\{\overline{ab}\in\mathbb{N} \mid a<b\}$; **c** $C=\{z\in\mathbb{Z} \mid |z|<18\}$; **d** $D=\{x \mid x^2\le 11,\ x\in\mathbb{Z}\}$.

8 Stabiliți care dintre mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\le x\le 2^{100}\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2^{100}\le x\le 2^{101}\}$ are mai multe elemente.

9 Se consideră mulțimile $A=\{1, 4, 7, 10, 13,...\}$, $B=\{2, 5, 8, 11, 14,...\}$ și $C=\{k^2 \mid k\in\mathbb{N}\}$.
- **a** Scrieți mulțimile A și B cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor.
- **b** Identificați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii $A\cap C$.
- **c** Arătați că mulțimile B și C sunt disjuncte.
- **d** Demonstrați că $A\cap B=\varnothing$.

AUTO evaluare

1 Scrieți cu ajutorul unei proprietăți comune a elementelor lor, mulțimile:
a $A=\{0, 1, 8, 27, 64, 125\}$; **b** $B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$; **c** $C=\{-30, -25, -20, -15\}$. **(3p)**

2 Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2\le 25\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2^x\le 25\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
a P_1: $A\subset B$; **b** P_2: $B\subset A$; **c** P_3: $A=B$. **(3p)**

3 Determinați mulțimea $M=\left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{2x-5}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.

Lecția 2: Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor

Cuvinte cheie

- interval de numere reale
- interval mărginit
- reprezentare geometrică
- interval deschis
- infinit
- intersecție
- interval închis
- interval nemărginit
- reuniune

Utilitate

Fenomenele sau procesele din viața de zi cu zi se derulează deseori între anumite limite. În vorbirea curentă, spunem că un astfel de eveniment (proces, fenomen) se desfășoară într-un anumit *interval*, definit de condițiile specifice evenimentului respectiv.
În timpul unei etape de raliu, o mașină parcurge o distanță bine delimitată (intervalul dintre start și sosire), într-o perioadă măsurată cu precizie (un interval de timp).
Evenimentele hidrologice desfășurate în amonte determină ca nivelul apei dintr-un râu să se modifice între anumite limite – astfel, nivelul apei variază într-un anumit interval.
Să observăm că toate aceste procese sunt *continue*: mașina de raliu nu poate ajunge de la start la sosire fără să treacă prin toate punctele de pe traseu, după cum nivelul apei nu poate crește de la 8 cm la 12 cm fără să fi ajuns la 9,12 cm, la 10,243 cm sau la orice altă valoare cuprinsă între 8 cm și 12 cm.
Pentru a studia astfel de procese, este nevoie să descriem mulțimile de numere reale care, odată cu orice două valori ale lor, *a* și *b*, conțin toate valorile intermediare cuprinse între *a* și *b*.

2.1. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

Mate practică

Meteorologia este disciplina care se ocupă cu studiul fenomenelor atmosferice și prognoza lor. Majoritatea activităților umane depind de condițiile meteo, iar prognoza fenomenelor atmosferice ne ajută în desfășurarea acestor activități.
Dimineața, la ora 6^{00}, Rareș observă că termometrul arată –3 °C.
Măsurând temperaturile din oră în oră, Rareș obține valorile:

6^{00}	7^{00}	8^{00}	9^{00}	10^{00}	11^{00}	12^{00}	13^{00}	14^{00}
–3 °C	–2,2 °C	–1 °C	1,5 °C	3 °C	4,2 °C	6 °C	7,4 °C	9 °C

În ce interval orar s-a atins temperatura de 0 °C? Dar cea de 5 °C?
Ce temperaturi s-au înregistrat până la ora 14^{00}?

Pe măsură ce atmosfera se încălzește, temperatura nu poate ajunge de la o valoare mai mică la una mai mare fără să treacă prin valorile intermediare.
Astfel, temperatura de 0 °C s-a atins între ora 8^{00} și ora 9^{00}, iar cea de 5 °C între 11^{00} și 12^{00}.
Temperaturile înregistrate între orele 6^{00} și 14^{00} sunt cuprinse între –3 °C și 9 °C sau, așa cum citește Rareș în aplicația *Vremea* de pe telefonul său mobil, sunt situate în intervalul de la –3 °C la 9 °C.

De reținut

Un interval de numere reale este o mulțime I de numere reale cu proprietatea că, pentru orice două numere reale $a, b \in I$, cu $a < b$, orice număr real cuprins între a și b aparține mulțimii I.
Cu alte cuvinte, o mulțime $I \subset \mathbb{R}$ este interval dacă:

pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, și orice $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < x < b$, rezultă $x \in I$.

Având în vedere corespondența dintre mulțimea numerelor reale și axa numerelor, *intervalele de numere reale se reprezintă geometric* sub formă de segment, semidreaptă sau chiar întreaga axă (o dreaptă).

Intervalele se clasifică în:

- *intervale mărginite* – a căror reprezentare geometrică este un segment sau un punct;
- *intervale nemărginite* – a căror reprezentare geometrică este fie o semidreaptă, fie axa numerelor.

În tabelul de mai jos sunt prezentate toate tipurile de intervale de numere reale, denumirile lor, cât și reprezentarea geometrică a acestora pe axa numerelor.

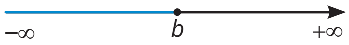
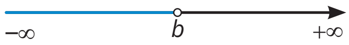
Pentru a reprezenta geometric o extremitate a unui interval care aparține acestuia, se folosește un punct plin sau o paranteză dreaptă, iar pentru capetele care nu aparțin intervalului, se utilizează un punct gol sau o paranteză rotundă.

Simbolurile $-\infty$ (*minus infinit*) și $+\infty$ (*plus infinit*) nu sunt numere reale; acestea se utilizează pentru a scrie intervale nemărginite de numere reale.

Intervale mărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	segment închis	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	interval închis: $a, b \in [a, b]$
	segment deschis	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	interval deschis: $a, b \notin (a, b)$
	segment semideschis	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	interval deschis la stânga și închis la dreapta: $a \notin (a, b], b \in (a, b]$
	segment semideschis	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	interval închis la stânga și deschis la dreapta: $a \in [a, b), b \notin [a, b)$

Intervale nemărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	semidreaptă închisă	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	interval închis la stânga: $a \in [a, +\infty)$
	semidreaptă deschisă	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	interval deschis la stânga: $a \notin (a, +\infty)$
	semidreaptă închisă	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	interval închis la dreapta: $b \in (-\infty, b]$
	semidreaptă deschisă	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	interval deschis la dreapta: $b \notin (-\infty, b)$
	dreaptă	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	mulțimea numerelor reale

Observație

1 Intervalele prezentate mai sus se numesc intervale nedegenerate (proprii).
Intervalul $[a, a]$ se reduce la un punct (interval degenerat):

$$[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le a\} = \{a\}.$$

2 Notațiile $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $[a, +\infty]$ sau $(a, +\infty]$ nu au sens.

Mulțimile notate (a, a), $(a, a]$ sau $[a, a)$ nu conțin numere reale: $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$.

3 Considerăm mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \le 2\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 < x \le 2\}$. Dintre acestea, doar mulțimea A reprezintă un interval de numere reale; mai exact, $A = (-3, 2]$.
Mulțimile B și C se obțin selectând numerele întregi, respectiv numerele naturale din A.
Cu alte cuvinte, mulțimea B este intersecția intervalului $(-3, 2]$ cu mulțimea numerelor întregi:

$$B = (-3, 2] \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Analog, $C = (-3, 2] \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$.

Exemple

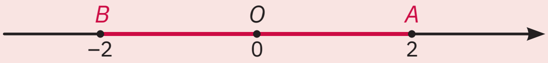
1 Considerăm următoarele mulțimi de numere reale, definite printr-o proprietate a elementelor:

a $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$;
b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4{,}5 \le x \le 2\}$;
c $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x < \frac{4}{3}\right\}$;
d $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x\}$;
e $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -4{,}5 \le x\}$;
f $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le \sqrt{3}\}$.

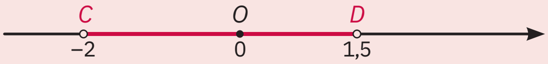
Dintre acestea:

- *A*, *B* și *C* sunt intervale mărginite: $A = (-2, 3)$, $B = [-4{,}5;\ 2]$, $C = \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$;
- *D*, *E* și *F* sunt intervale nemărginite: $D = (\sqrt{2}, +\infty)$, $E = [-4{,}5;\ +\infty)$, $F = (-\infty, \sqrt{3}]$.

2 O mulțime de numere reale reprezentată pe axa numerelor printr-un segment este un interval mărginit:

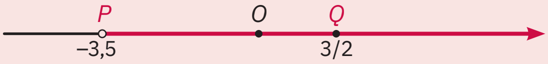


Mulțimea reprezentată prin segmentul închis [*BA*] este intervalul închis [−2, 2].



Mulțimea reprezentată prin segmentul deschis (*CD*) este intervalul deschis (−2; 1,5).

3 O mulțime de numere reale care se reprezintă pe axa numerelor sub forma unei semidrepte este un interval nemărginit.

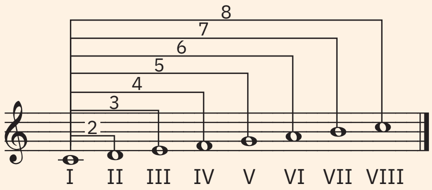


Semidreapta deschisă (*PQ* este reprezentarea pe axă a intervalului (−3,5; +∞).

Semidreapta închisă [*RS* este reprezentarea pe axă a intervalului (−∞, 1].

Cultură matematică

În muzică, un interval este raportul dintre înălțimile a două note. Intervalul muzical constituie elementul de construcție fundamental în orice alcătuire melodică sau armonică, iar muzica pe care o ascultăm nu este altceva decât o înșiruire, interesantă și creativă, de intervale muzicale.



2.2. Intersecția și reuniunea intervalelor

Situație problemă

Lunea, elevii clasei a VIII-a A dintr-o școală au ore în intervalul orar 8 – 13, iar elevii clasei a VIII-a B au ore de la 9 la 14.

a În ce interval orar au fost prezente în același timp la cursuri ambele clase?

b În ce interval orar au fost prezenți la cursuri elevi de clasa a VIII-a?

Asociem perioadelor de timp petrecute la școală de cele două clase intervalele [8, 13], respectiv [9, 14].

Întrucât intervalele sunt mulțimi de numere, putem efectua cu acestea operațiile de intersecție, respectiv reuniune.

	a VIII-a A	a VIII-a B
8:00	Istorie	
9:00	Franceză	Engleză
10:00	Matematică	Română
11:00	Fizică	Matematică
12:00	Desen	Muzică
13:00		Geografie
14:00		

Cele două clase au fost simultan la cursuri de la ora 9 la ora 13. Așadar, $[8, 13] \cap [9, 14] = [9, 13]$.

Elevi de clasa a VIII-a, fie de la o clasă, fie de la cealaltă, se află în școală între orele 8 și 14. Putem scrie $[8, 13] \cup [9, 14] = [8, 14]$.

De reținut

Se consideră două intervale de numere reale, *I* și *J*. Atunci:

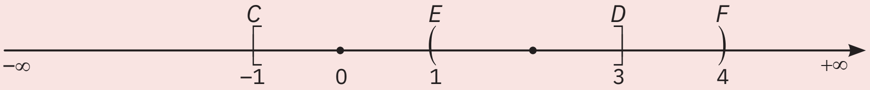
- mulțimea $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$ se numește *reuniunea intervalelor I și J*;
- mulțimea $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$ se numește *intersecția intervalelor I și J*.

Pentru determinarea intersecției și a reuniunii a două sau a mai multor intervale, se poate utiliza reprezentarea lor geometrică pe axa numerelor.

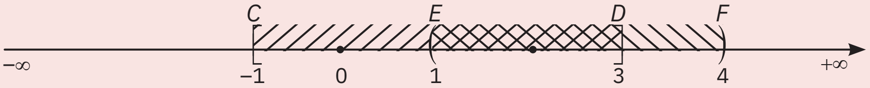
Exemplu

Fie intervalele $I = [-1, 3]$ și $J = (1, 4)$. Pentru a determina mulțimile $I \cap J$ și $I \cup J$, parcurgem pașii:

Pasul 1: Reprezentăm pe axă numerele −1, 3, 1 și 4 (capetele intervalelor I și J) și obținem punctele $C(-1)$, $D(3)$, $E(1)$ și $F(4)$.
Intervalului I îi corespunde, pe axă, segmentul închis CD, iar lui J îi corespunde segmentul deschis EF. Marcăm corespunzător aceste intervale pe axa numerelor.



Pasul 2: Hașurăm segmentul CD într-un anumit sens și segmentul EF în alt sens.



Pasul 3: Intersecția intervalelor I și J este mulțimea punctelor hașurate în ambele sensuri:

$$I \cap J = (1, 3].$$

Reuniunea intervalelor I și J este mulțimea punctelor hașurate cel puțin o dată.

$$I \cup J = [-1, 4).$$

Observații

Intersecția a două intervale poate fi:

un interval	un punct	mulțimea vidă
$(2, 6) \cap (-1, 4) = (2, 4)$	$[0, 2] \cap [2, 5] = \{2\}$	$(-2, 1) \cap (2, 4) = \varnothing$
$[-2, 3] \cap [1, \infty) = [1, 3]$	$(-1, 1] \cap [1, \infty) = \{1\}$	$(-\infty, 2) \cap [2, 4] = \varnothing$

Reuniunea a două intervale poate fi:

un interval	o mulțime care nu este interval
$[0, 2] \cup [2, 5] = [0, 5]$	$(-2, 1) \cup (3, 5)$
$(-\infty, 1) \cup (0, 4) = (-\infty, 4)$	$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
$(-\infty, 5) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$	$[0, 4] \cup (8, \infty)$

Portofoliu

1 Folosiți reprezentările grafice ale intervalelor pe axa numerelor pentru a efectua operațiile cu intervalele indicate în exemplele de mai sus, punând în evidență legătura dintre:
- operațiile de intersecție și de reuniune a intervalelor;
- intersecția și reuniunea segmentelor sau a semidreptelor.

2 Dați câte două exemple proprii pentru fiecare tip de mulțime care poate fi obținută ca rezultat al intersecției, respectiv reuniunii a două intervale.

2.3. Modulul unui număr real

Activitate pe echipe

Se împarte clasa în două grupe, colegii de bancă fiind în grupe diferite.
Fiecare elev trebuie să scrie pe o foaie de hârtie numere reale cu modulul mai mic sau egal cu 4, respectând următoarele condiții:

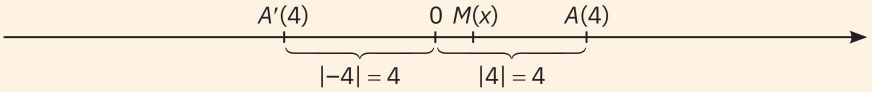
Grupa 1:	**Grupa 2:**
A1 trei numere naturale;	A2 trei numere întregi negative;
B1 trei numere raționale negative;	B2 trei numere raționale pozitive;
C1 trei numere iraționale pozitive.	C2 trei numere iraționale negative.

Numerele scrise sunt prezentate la tablă, însoțite de justificările necesare.

Ce observăm?

Există o mulțime finită, alcătuită din numere naturale și întregi care au modulul mai mic sau egal cu 4. În același timp, există o infinitate de numere raționale și iraționale care au modulul mai mic sau egal cu 4. Intuim că numerele reale cu modulul mai mic sau egal cu 4 se află în intervalul $[-4, 4]$. Într-adevăr, să ne amintim că modulul unui număr real x este egal cu distanța de la originea axei numerelor la punctul de abscisă x.

Un număr real x având modulul mai mic sau egal cu 4 se reprezintă pe axă într-un punct M cu $OM \le 4$.



Întrucât $OA = OA' = 4$, condiția $OM \le 4$ este verificată dacă și numai dacă punctul M aparține segmentului AA'. Deducem că numerele reale x cu proprietatea $|x| \le 4$ sunt numerele din intervalul $[-4, 4]$.

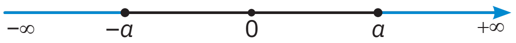
De reținut

Se consideră un număr real a, $a > 0$. Atunci:

1 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le a\} = [-a, a]$

2 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = (-a, a)$

3 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$



4 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

Exemple

a $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} = (-3, 3)$;

b $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 6\} = [-6, 6]$;

c $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$;

d $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge \sqrt{7}\} = (-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, +\infty)$;

e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge -1\} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

f $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1 Verificați dacă numerele reale -4 ; $2{,}4$; $\sqrt{3}$; $3{,}(6)$; $\frac{4}{5}$ aparțin intervalului $I = (-3, 3)$.

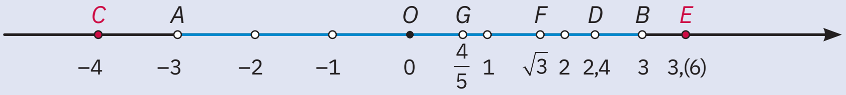
Rezolvarea 1: folosind definiția intervalului

Un număr real x aparține intervalului $(-3, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ dacă verifică relația $-3 < x < 3$. Vom compara numerele date cu -3 și cu 3. Putem organiza datele într-un tabel:

x	-4	$2{,}4$	$\sqrt{3}$	$3{,}(6)$	$\frac{4}{5}$
compararea	$-4 < -3$	$-3 < 2{,}4 < 3$	$-3 < \sqrt{3} < \sqrt{9} = 3$	$3{,}(6) > 3$	$-3 < \frac{4}{5} < \frac{15}{5} = 3$
concluzia	$-4 \notin (-3, 3)$	$2{,}4 \in (-3, 3)$	$\sqrt{3} \in (-3, 3)$	$3{,}(6) \notin (-3, 3)$	$\frac{4}{5} \in (-3, 3)$

Rezolvarea 2: folosind reprezentarea pe axa numerelor

Reprezentăm intervalul $I = (-3, 3)$ pe axa numerelor prin segmentul AB și numerele reale -4; $2{,}4$; $3{,}(6)$; $\sqrt{3}$; $\frac{4}{5}$ prin punctele C, D, E, F, respectiv G.



Se observă că punctele G, F și D aparțin segmentului AB, deci numerele $\frac{4}{5}$, $\sqrt{3}$ și 2,4 aparțin lui I.

Punctele C și E nu aparțin segmentului AB, deci numerele −4 și 3,(6) nu sunt în intervalul I.

2 Determinați cel mai mic și cel mai mare număr natural din intervalul $[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}]$.

Rezolvare

Deoarece $3=\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}=4$ și $\sqrt{25}=5<\sqrt{32}=4\sqrt{2}<\sqrt{36}=6$, rezultă că cel mai mic număr natural din intervalul $[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}]$ este 4, iar cel mai mare număr natural din intervalul $[2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}]$ este 5.

3 Determinați elementele mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 6<x<\sqrt{223}\}$.

Rezolvare

Pentru a determina cel mai mare număr natural din intervalul $(6, \sqrt{223})$ vom încadra numărul 223 între două pătrate perfecte consecutive. Obținem $14=\sqrt{196}<\sqrt{223}<\sqrt{225}=15$, de unde rezultă $A=\{7, 8, ..., 14\}$.

4 Determinați mulțimile:

a $A=\{x\in\mathbb{N} \mid |x|<3{,}7\}$; **b** $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, |x|<\frac{11}{2}\right\}$; **c** $C=\{x\in\mathbb{N}^* \mid |x|\le 2\}$; **d** $D=\{x\in\mathbb{Z}^* \mid |x|\le 2\sqrt{5}\}$.

Rezolvare

a $A=\{x\in\mathbb{N} \mid |x|<3{,}7\}=(-3{,}7; 3{,}7)\cap\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3\}$;

b $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, |x|<\frac{11}{2}\right\}=\left(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)\cap\mathbb{Z}=(-5{,}5; 5{,}5)\cap\mathbb{Z}=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

c $C=\{x\in\mathbb{N}^* \mid |x|\le 5\}=[-5, 5]\cap\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

d $D=\{x\in\mathbb{Z}^* \mid |x|\le\sqrt{5}\}=[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]\cap\mathbb{Z}^*=\{-2, -1, 1, 2\}$.

5 Știind că $x\in(-2, 3)$, $y\in(-3, 5)$ și $x+y\in(a, b)$, $a, b\in\mathbb{R}$, determinați cea mai mică valoare a lui b și cea mai mare valoare a lui a.

Rezolvare

Avem $x\in(-2, 3)\Leftrightarrow -2<x<3$ (1) și $y\in(-3, 5)\Leftrightarrow -3<y<5$ (2). Adunând inegalitățile (1) și (2) termen cu termen, obținem $-5<x+y<8 \Leftrightarrow x+y\in(-5, 8)$, deci $a=-5$ și $b=8$.

Probleme propuse

1 Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a $\{x\in\mathbb{R} \mid -3<x<5\}$; **b** $\{x\in\mathbb{R} \mid -2\le x<7\}$; **c** $\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x\le 13\}$; **d** $\{x\in\mathbb{R} \mid -4\le x\}$;
e $\{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x\le 8\}$; **f** $\{x\in\mathbb{R} \mid 5<x\}$; **g** $\{x\in\mathbb{R} \mid x<9\}$; **h** $\{x\in\mathbb{R} \mid x\le -5\}$.

2 Reprezentați pe axa numerelor intervalele:

a $(-1, 5)$; **b** $[2, 6]$; **c** $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$; **d** $\left[1{,}25; \frac{7}{2}\right)$;

e $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$; **f** $(-\infty, \sqrt{5})$; **g** $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$; **h** $[2\sqrt{2}, +\infty)$.

3 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p1: $\sqrt{5}\in[2, 6]$; **p2:** $\frac{\sqrt{5}}{2}\in(-1, 3)$; **p3:** $2,(3)\in\{2, 3\}$; **p4:** $2{,}3\in\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$;

p5: $2\sqrt{2}\notin[2, 3]$; **p6:** $\frac{4}{3}\in[1{,}2; 1{,}3]$; **p7:** $\sqrt{5}\in\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right]$; **p8:** $11\in(-11, 11)$;

p9: $-\frac{2}{3}\in[-3, -2]$; **p10:** $1\in\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$; **p11:** $\sqrt{12}-\sqrt{2}\in[\sqrt{2}, \infty)$; **p12:** $\sqrt{7}+\sqrt{3}\in(-\infty, 2\sqrt{5})$.

4 Reprezentați pe axa numerelor:

- **a** intervalul deschis la stânga în $-\sqrt{2}$ și nemărginit la dreapta;
- **b** intervalul închis la dreapta în −4 și deschis la stânga în −6;
- **c** intervalul închis la stânga și la dreapta în 3 și 7;
- **d** intervalul deschis la stânga în 0 și deschis la dreapta în 2.

5 Dați câte un exemplu de:

- **a** număr natural din intervalul $(-3, 3\sqrt{3})$;
- **b** număr întreg din intervalul $[-\sqrt{7}, 2]$;
- **c** număr rațional din intervalul $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;
- **d** număr irațional din intervalul [2, 3].

6 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- **a** $\mathbb{Z} \cap (-1, 5) = \varnothing$;
- **b** $\mathbb{N} \subset (-2, +\infty)$;
- **c** $\{-3, 3\} \not\subset [-3, 3]$;
- **d** $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{13}\right) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.

7 Copiați pe caiet tabelul alăturat și asociați fiecărei litere din coloana **A** cifra corespunzătoare din coloana **B**, astfel încât numărul din dreapta cifrei să aparțină intervalului din dreapta literei.

A	B
1 −3	**a** (0, 11)
2 4	**b** (−5, −3)
3 0	**c** (−∞, −4]
4 −5	**d** (−4, −1]
	e [0, 3]

8 Copiați pe caiet și completați spațiile punctate, pentru a obține propoziții adevărate:

- **a** $5 \in [\ldots, 11]$;
- **b** $\ldots \in (1; 7{,}25)$;
- **c** $\frac{2}{5} \in (0, \ldots)$;
- **d** $\ldots \in (-5, \ldots)$;
- **e** $a^2 \in (-1, \ldots)$;
- **f** $\frac{1}{3} \in (\ldots, \ldots)$.

9 Determinați, în fiecare caz, reuniunea și intersecția intervalelor I și J indicate:

- **a** $I = (-\infty, 2)$, $J = [0, +\infty)$;
- **b** $I = [-2, 3]$, $J = (0, 5)$;
- **c** $I = [-1, 2]$, $J = [2, +\infty)$;
- **d** $I = (-\infty, \sqrt{9}]$, $J = (3, +\infty)$;
- **e** $I = (-\infty, 8)$, $J = (4, 6)$;
- **f** $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $I = (-\sqrt{3}, \sqrt{7} - 1)$.

10 Se consideră numerele reale $x = |\sqrt{6} - 3|$ și $y = |\sqrt{2} - 1|$. Dați exemple de intervale $I = [a, b]$, unde a și b sunt numere reale cu $b - a = 1$, astfel încât:

- **a** $x \in I, y \in I$;
- **b** $x \in I, y \notin I$;
- **c** $x \notin I, y \in I$;
- **d** $x \notin I, y \notin I$.

11 Determinați numărul real m, pentru care intersecția intervalelor $\left(-\infty, -\frac{m-1}{3}\right]$ și $\left[\frac{2m+1}{5}, \infty\right)$ este o mulțime cu un singur element.

12 Scrieți sub formă de interval mulțimile:

- **a** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 3\}$;
- **b** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \le 2\}$;
- **c** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - x| < 1\}$;
- **d** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$.

13 Demonstrați că $|x + 3| + |1 - x| = 4$, pentru orice număr real $x \in [-3, 1]$.

AUTO evaluare

1 Scrieți sub formă de interval mulțimile:

- **a** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -13 < x \le 15\}$;
- **b** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 2\}$;
- **c** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \le x \le 2\}$. **(3p)**

2 Dacă $A = (-4, 3)$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le x < \frac{15}{4}\right\}$, atunci precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- **a** $B = \left[-1, \frac{15}{4}\right)$;
- **b** $A \cap B = (-1, 3)$;
- **c** $A \cup B = \left(-4, \frac{15}{4}\right)$. **(3p)**

3 **a** Reprezentați pe axa numerelor intervalele $A = \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$, $B = \left[\frac{5}{4}, \sqrt{5}\right)$ și $C = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

b Determinați mulțimile $A \cap C$, $B \cup C$ și $A \cap B$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.

Lecția 3: Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq$, $>$, $<$), $a, b \in \mathbb{R}$

Cuvinte cheie

- inegalitate
- necunoscută
- inecuație
- soluție
- coeficienți
- inecuații echivalente

Utilitate

În practică, pentru a caracteriza situațiile descrise de o serie de valori (și nu neapărat de o singură valoare), se folosesc inegalități.
Un autoturism circulă legal pe sectorul de drum pe care este montat un indicator rutier pentru limitare de viteză, precum cel din imagine, dacă viteza sa (notată cu v) verifică relația $v \leq 80$ km/h.

Pentru a fi admisă la o școală de vară, Sonia trebuie să obțină, după patru teste, o medie de cel puțin 90 de puncte din 100 posibile. Media de admitere m verifică inegalitatea $m \geq 90$.
Dacă la primele trei teste a obținut 87, 93, respectiv 88 de puncte, condiția pentru ca Sonia să fie admisă se poate exprima printr-o nouă inegalitate: nota n a ultimului test trebuie să satisfacă relația:

$$\frac{87+93+88+n}{4} \geq 90 .$$

Rezolvarea unor situații practice impune deseori determinarea valorilor unui termen variabil (o necunoscută), care verifică o relație matematică exprimată printr-o inegalitate.

Mate practică

Pe pârtia de schi, închirierea unui echipament costă 70 de lei, iar un tichet de urcare cu telescaunul până în vârful pârtiei costă 8 lei.
Poate Rareș să închirieze un echipament și să cumpere 20 de tichete de telescaun dintr-un buget de 200 de lei?

Care este numărul de coborâri pe care le poate poate face Rareș într-o zi petrecută pe pârtie, cu acest buget?

Ce observăm?
Prețul a n urcări cu telescaunul este de $8n$ lei, deci cheltuielile pentru o zi de schi (echipament + urcări) se ridică la $8n + 70$ lei.
Condiția de încadrare în buget se scrie $8n + 70 \leq 200$.
Pentru 20 de urcări, vom verifica dacă $n = 20$ satisface condiția obținută anterior.
Obținem $8 \cdot 20 + 70 \leq 200$, adică $230 \leq 200$, fals, deci Rareș nu poate cumpăra 20 de urcări.
Numărul de coborâri (egal cu numărul de urcări), se găsește observând că relația $8n + 70 \leq 200$ este echivalentă cu $8n \leq 200 - 70$, adică $8n \leq 130$. Deducem că $n \leq \frac{130}{8}$, de unde $n \leq 16{,}25$.

Calculele de mai sus corespund următorului raționament: după închirierea echipamentului, Rareș dispune de $200 - 70 = 130$ lei. Împărțind suma rămasă la 8 (prețul unui tichet de telescaun), obținem $130 : 8 = 16{,}25$.

Cum numărul de tichete n este număr natural, Rareș poate face cel mult 16 coborâri.

3.1. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (≤ 0, > 0, < 0), unde $a, b \in \mathbb{R}$

De reținut

O inecuație având una dintre formele:
1 $ax + b \geq 0$ **2** $ax + b \leq 0$ **3** $ax + b > 0$ **4** $ax + b < 0$
unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește *inecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale a și b se numesc *coeficienții inecuației*, iar x se numește *necunoscuta* sau *variabila inecuației*.

În general, o inegalitate între două expresii algebrice în care apare un termen necunoscut se numește *inecuație cu o necunoscută*.
Un număr real se numește *soluție a unei inecuații* dacă, prin înlocuirea necunoscutei cu acest număr în inecuația dată, se obține o propoziție adevărată.
A rezolva o inecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor inecuației* date și se notează, de regulă, cu S.
Dacă după o inecuație în necunoscuta x urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea valorilor admise ale lui x (sau mulțimea în care ia valori necunoscuta).

Exemple

1 Numărul real 2 este soluție a inecuației $3x - 9 < 0$, deoarece înlocuind x cu 2 se obține propoziția $3 \cdot 2 - 9 < 0$, care este adevărată.
2 Numărul real -2 nu este soluție a inecuației $4x + 5 > 0$, deoarece propoziția $4 \cdot (-2) + 5 > 0$ este falsă.
3 Orice număr natural n verifică relația $5n + 3 > 0$, deci este soluție a ecuației $5x + 3 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
Relația $5n + 3 > 0$, valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, justifică și următoarele afirmații:
- mulțimea soluțiilor ecuației $5n + 3 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, este mulțimea numerelor naturale: $S = \mathbb{N}$;
- mulțimea soluțiilor ecuației $5n + 3 < 0$, $n \in \mathbb{N}$, este mulțimea vidă: $S = \varnothing$.

Observații

Două inecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceeași mulțime a soluțiilor. De exemplu, inecuațiile care se rezolvă în $\mathbb{R}$:

$$(1)\ x - 3 > 0 \qquad \text{și} \qquad (2)\ 2x - 6 > 0$$

sunt echivalente, întrucât dacă un număr real verifică inecuația (1), atunci verifică și inecuația (2) și reciproc. Mulțimea soluțiilor fiecăreia dintre cele două inecuații este $(3, +\infty)$.
Pentru a rezolva o inecuație, adică pentru a afla toate soluțiile sale, vom folosi *proprietățile relației de ordine*, obținând inecuații echivalente cu inecuația dată.

Proprietatea relației de ordine	**Cum se aplică proprietatea**
1 Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$.	Adunăm același număr în ambii membri ai inecuației.
2 Dacă $a < b$, atunci $a - c < b - c$.	Scădem același număr din ambii membri ai inecuației.
3 Dacă $a + c < b$, atunci $a < b - c$. Dacă $a < b + c$, atunci $a - c < b$.	Trecem un termen dintr-un membru în celălalt, cu semn schimbat.
4 Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci: a $a \cdot c < b \cdot c$; b $a : c < b : c$.	Înmulțim/împărțim ambii membri ai inecuației cu un număr pozitiv, păstrând sensul inegalității.
5 Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci: a $a \cdot c > b \cdot c$; b $a : c > b : c$.	Înmulțim/împărțim ambii membri ai inecuației cu un număr negativ, schimbând sensul inegalității.

Remarcăm faptul că proprietățile indicate la 3 decurg din proprietățile 1 și 2. Proprietățile din tabel rămân valabile atunci când se înlocuiește semnul $<$ cu semnul $\le$ și se adaptează corespunzător dacă în loc de $\le$ se utilizează semnele $\ge$, respectiv $>$.

De reținut

Algoritm pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $ax + b < 0$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$

Pasul 1: Îl scădem pe b din ambii membri ai inecuației și obținem inecuația echivalentă $ax < -b$.

Pasul 2: Împărțim ambii membri ai inecuației la numărul real a. Avem două cazuri:

a dacă $a > 0$: $x < -\frac{b}{a}$; b dacă $a < 0$: $x > -\frac{b}{a}$.

Pasul 3: Scriem inegalitatea obținută sub forma unei relații de apartenență a lui x la un interval:

a dacă $a > 0$: $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$; b dacă $a < 0$: $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $ax + b < 0$ este intervalul determinat la pasul 3:

a dacă $a > 0$: $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$; **b** dacă $a < 0$: $S = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

Inecuațiile de forma $ax + b \le 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \ge 0$ ($x \in \mathbb{R}$) se rezolvă în mod asemănător.

Exemple

Inecuația	**Pasul 1**	**Pasul 2**	**Pasul 3**	**Mulțimea soluțiilor**
$4x + 16 < 0$	$4x < -16$	$x < -4$	$x \in (-\infty, -4)$	$S = (-\infty, -4)$
$2x - \sqrt{3} \le 0$	$2x \le \sqrt{3}$	$x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$	$S = \left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
$-6x + \frac{5}{7} > 0$	$-6x > -\frac{5}{7}$	$x < \frac{5}{42}$	$x \in \left(-\infty, \frac{5}{42}\right)$	$S = \left(-\infty, \frac{5}{42}\right)$
$9x - 27 \ge 0$	$9x \ge 27$	$x \ge 3$	$x \in [3, +\infty)$	$S = [3, +\infty)$

Observații

1 În modelarea matematică a unor situații practice este necesar uneori să studiem inecuații de forma $ax + b < 0$, pentru toate valorile lui a dintr-un anumit set de valori.
Dacă printre aceste valori se găsește și 0, pentru $a = 0$, inecuația $ax + b < 0$ devine $0x + b < 0$, iar mulțimea soluțiilor depinde de valoarea de adevăr a propoziției $b < 0$.
Dacă $b < 0$, orice număr real x verifică relația $0x + b < 0$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \mathbb{R}$.
Dacă $b = 0$ sau $b > 0$, niciun număr real nu satisface condiția $0x + b < 0$, deci $S = \varnothing$.

2 Pentru a rezolva o inecuație de gradul I într-o submulțime A a mulțimii numerelor reale, putem rezolva mai întâi inecuația în mulțimea $\mathbb{R}$, după care selectăm din mulțimea soluțiilor acele elemente care aparțin lui A (intersectăm intervalul găsit cu A).
Să rezolvăm inecuația $5x - 23 < 0$ în mulțimea numerelor naturale ($x \in \mathbb{N}$). Avem succesiv:

$$5x - 23 < 0 \Leftrightarrow 5x < 23 \Leftrightarrow x < \frac{23}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{23}{5}\right), \text{ deci } S = \left(-\infty, \frac{23}{5}\right) \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

3 Folosind proprietățile relației de ordine, putem rezolva și inecuații *reductibile* la inecuații de gradul I, adică inecuații care pot fi aduse la una dintre formele $ax + b \ge 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \le 0$ sau $ax + b < 0$, ca în exemplele următoare:

a $7x - 11 < 2x - 6 \Leftrightarrow 7x - 2x - 11 + 6 < 0 \Leftrightarrow 5x < 5$, pentru care $S = (-\infty, 1)$;

b $\frac{2x-6}{5} \ge \frac{x-4}{3} \Leftrightarrow 3(2x - 6) \ge 5(x - 4) \Leftrightarrow 6x - 18 \ge 5x - 20 \Leftrightarrow x + 2 \ge 0$, cu $S = [-2, \infty)$.

4 O inecuație de forma $\frac{a}{bx+c} < 0$ (respectiv ≤ 0, > 0 sau < 0), unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a, b \ne 0$, este reductibilă la o inecuație de gradul I. Ținând cont de regula semnelor, avem două cazuri:

a dacă $a > 0$, inecuația $\frac{a}{bx+c} < 0$ este echivalentă cu $bx + c < 0$;

b dacă $a < 0$, inecuația $\frac{a}{bx+c} < 0$ este echivalentă cu $bx + c > 0$.

Exemple

1 Pentru a rezolva inecuația $\frac{5}{3x-7} < 0$, să observăm mai întâi că numărătorul este pozitiv: $5 > 0$.

Inecuația se scrie echivalent: $3x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$, adică $S = \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$.

2 Numărătorul fracției din membrul stâng al inecuației $\frac{-202}{2x-18} \leq 0$ este negativ: $-202 < 0$.

Succesiv, avem: $\frac{-202}{2x-18} \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 18 > 0 \Leftrightarrow x > 9 \Leftrightarrow x \in (9, +\infty) \Leftrightarrow S = (9, +\infty)$.

3 $\frac{32}{-5x+12} > 0 \overset{32>0}{\Rightarrow} -5x + 12 > 0 \Leftrightarrow -5x > -12 \Leftrightarrow x < \frac{12}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{12}{5}\right)$, adică $S = \left(-\infty, \frac{12}{5}\right)$.

3.2. Inecuații de forma $|ax + b| \leq c$ sau $|ax + b| < c$

Gândire critică

Fie $c > 0$ un număr real. Din lecția precedentă ne amintim că:

- mulțimea numerelor reale care verifică relația $|x| < c$ este intervalul $(-c, c)$;
- mulțimea numerelor reale care verifică relația $|x| \leq c$ este intervalul $[-c, c]$.

Au loc echivalențele:

1 $|x| < c$ dacă și numai dacă $-c < x < c$; 2 $|x| \leq c$ dacă și numai dacă $-c \leq x \leq c$.

Inecuația $|x| < c$ este un caz particular al inecuației de forma $|ax + b| < c$, pentru $a = 1$ și $b = 0$.

De reținut

Algoritm pentru rezolvarea inecuațiilor de forma $|ax + b| < c$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $c > 0$

Pasul 1: Rescriem inecuația $|ax + b| < c$ sub forma dublei inegalități $-c < ax + b < c$.

Pasul 2: Scădem b din fiecare membru și obținem dubla inecuație $-c - b < ax < c - b$.

Pasul 3: Împărțim fiecare membru prin a, ținând cont de proprietățile relației de ordine:

a dacă $a > 0$: $\frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}$; b dacă $a < 0$: $\frac{-c-b}{a} > x > \frac{c-b}{a}$.

Pasul 4: Scriem inegalitățile obținute sub forma unei relații de apartenență a lui x la un interval:

a dacă $a > 0$: $x \in \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$; b dacă $a < 0$: $x \in \left(\frac{c-b}{a}, \frac{-c-b}{a}\right)$.

Mulțimea soluțiilor inecuației $|ax + b| < c$ este intervalul determinat la pasul 4:

a dacă $a > 0$: $S = \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$; b dacă $a < 0$: $S = \left(\frac{c-b}{a}, \frac{-c-b}{a}\right)$.

Inecuația de forma $|ax + b| \leq c$ se rezolvă asemănător, soluțiile fiind aceleași intervale obținute pentru inecuația $|ax + b| < c$, însă închise la capete.

Exemple

Inecuația	Pasul 1	Pasul 2	Pasul 3	Pasul 4	Mulțimea soluțiilor
$\lvert 3x - 11\rvert < 9$	$-9 < 3x - 11 < 9$	$2 < 3x < 20$	$\frac{2}{3} < x < \frac{20}{3}$	$x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right)$	$S = \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{3}\right)$
$\lvert 2x - 17\rvert \leq 5$	$-5 \leq 2x - 17 \leq 5$	$12 \leq 2x \leq 22$	$\frac{12}{2} \leq x \leq \frac{22}{2}$	$x \in [6, 11]$	$S = [6, 11]$
$\lvert -4x + 6\rvert \leq 7$	$-7 \leq -4x + 6 \leq 7$	$-13 \leq -4x \leq 1$	$\frac{-13}{-4} \geq x \geq \frac{1}{-4}$	$x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right]$	$S = \left[-\frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right]$

Observații

1 Dacă $c < 0$, inecuațiile $|ax + b| < c$ și $|ax + b| \leq c$ nu au soluții.
De exemplu, inecuația $|3x - 11| < -11$ nu are soluții, deoarece $|3x - 11| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $-11 < 0$. Ca urmare, $S = \varnothing$.

2 Dacă $c = 0$, inecuația $|ax + b| < 0$ nu are soluții, deoarece modulul oricărui număr real este mai mare sau egal cu 0. În acest caz, $S = \varnothing$. Inecuația $|ax + b| \le 0$ se verifică doar în cazul $|ax + b| = 0$, deci are soluție unică: $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Considerând, de exemplu, inecuația $|7x - 21| \le 0$ și ținând cont că $|7x - 21| \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, obținem $|7x - 21| = 0$, de unde $7x - 21 = 0$, adică $x = 3$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{3\}$.

Investigație

Care este cea mai avantajoasă metodă de a verifica dacă mai multe numere reale sunt soluții ale unei inecuații?

Considerați inecuațiile (1) $2x - 1 < 3$ și (2) $|2x - 1| < 3$.

Lucrați în echipă cu colegul de bancă, împărțindu-vă sarcinile de lucru, timp de 15 de minute, după următorul plan:

1 Verificați, prin înlocuire directă, dacă numerele -11, $-\frac{5}{2}$, -1, 0, 2, $\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}$ și $1-\sqrt{2}$ sunt soluții ale celor două inecuații.

2 Rezolvați inecuațiile (1) și (2) și verificați dacă numerele anterioare fac parte din mulțimea soluțiilor.

3 Comparați rezultatele obținute și corectați erorile apărute, dacă este cazul.

4 Comparați avantajele și dezavantajele celor două metode.

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1 Rezolvați inecuațiile:

a $3 - \frac{4}{3}x > -\frac{5}{2}$; b $\frac{4-x}{5} + \frac{1}{2} \le \frac{x-1}{10}$; c $1 - \frac{x-4}{3} \le \frac{x}{2}$.

Rezolvare

a Înmulțind inecuația cu 6, obținem succesiv:

$$18 - 8x > -15 \Leftrightarrow -8x > -15 - 18 \Leftrightarrow -8x > -33 \Leftrightarrow x < \frac{33}{8} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{33}{8}\right).$$

b $\frac{4-x}{5} + \frac{1}{2} \le \frac{x-1}{10} \Big| \cdot 10 \Leftrightarrow 2(4-x) + 5 \le x - 1 \Leftrightarrow 8 - 2x + 5 \le x - 1 \Leftrightarrow -3x \le -14 \Leftrightarrow x \ge \frac{14}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{14}{3}, +\infty\right).$

c $1 - \frac{x-4}{3} \le \frac{x}{2} \Big| \cdot 6 \Leftrightarrow 6 - 2(x-4) \le 3x \Leftrightarrow 6 - 2x + 8 \le 3x \Leftrightarrow -5x \le -14 \Leftrightarrow x \ge \frac{14}{5} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{14}{5}, +\infty\right).$

2 Scrieți sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -11 < 2x + 3 < 5\}$.

Rezolvare

$-11 < 2x + 3 < 5 \mid -3 \Leftrightarrow -14 < 2x < 2 \mid : 2 \Leftrightarrow -7 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-7, 1) = A$.

3 Suma dintre sfertul, treimea și jumătatea unui număr natural nenul este mai mică decât 2. Determinați numărul natural.

Rezolvare

Notând numărul natural cu n, obținem inecuația $\frac{n}{4} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} < 2$. Înmulțind ambii membri cu 12, rezultă $3n + 4n + 6n < 24$, de unde $n < \frac{24}{13}$. Cum n este natural nenul, deducem că $n = 1$.

4 O bancă oferă pentru depozitele pe un an o dobândă de 10%. Calculați suma minimă (în lei, fără diviziuni ale leului) pe care trebuie să o depună un client, astfel încât peste doi ani să poată retrage 10 000 de lei.

Rezolvare

Notăm cu x suma depusă și obținem $\frac{110}{100}\cdot\left(\frac{110}{100}x\right)\geq 10\,000 \Leftrightarrow x\geq 8\,264{,}46$.

Clientul trebuie să depună suma minimă de 8 265 de lei.

5 Rezolvați inecuația $\frac{x-1}{x-3}<1$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 3$.

Rezolvare

$$\frac{x-1}{x-3}<1\,\Big|-1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{x-3}-1<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1-(x-3)}{x-3}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 3).$$

Probleme propuse

1 Verificați dacă numărul 3 este soluție a următoarelor inecuații:

a $11x-5<0$; **b** $\frac{x-5}{3}<0$; **c** $4x-5\geq 0$; **d** $-x+\sqrt{10}<0$.

2 Scrieți trei inecuații echivalente cu inecuația $\frac{x}{2}-3\geq 0$.

3 Rezolvați inecuațiile:

a $2x-6<4$, $x\in\mathbb{N}$; **b** $3x-6>9$, $x\in\{3, 4, 5, 6, 7\}$; **c** $6+2x<4$, $x\in[-3, \infty)$; **d** $4x+8<4$, $x\in\mathbb{Z}$.

4 Rezolvați inecuațiile:

a $11x-5<0$; **b** $\frac{x-5}{3}<0$; **c** $4x-5\geq 0$; **d** $-x+\sqrt{10}<0$.

5 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a $3x-1<x+5$; **b** $6x-11\leq 3x+7$; **c** $1-2x\leq 4-x$; **d** $2x-4\sqrt{2}<0$.

6 Verificați, pentru fiecare dintre cazurile de mai jos, dacă inecuațiile date sunt echivalente.

a $3x-1<0$ și $\frac{-7}{3x-1}\geq 0$; **b** $4-2x<0$ și $\frac{4}{4-2x}>0$.

7 Precizați care dintre inecuațiile de mai jos este echivalentă cu inecuația $-3x-4<0$:

a $3x<4$; **b** $3x>-4$; **c** $3x-4>0$; **d** $6x+8<0$.

8 **a** Determinați cele mai mici trei numere naturale consecutive cu suma cel puțin egală cu 202.
b Aflați cele mai mari trei numere naturale impare consecutive cu suma mai mică decât 149.

9 Se scade 3 din jumătatea unui număr natural n și se obține un număr mai mic decât 2. Determinați numărul natural n.

10 George execută serii de câte 30 de aruncări la coșul de baschet. În primele trei serii a înscris de 21, 26, respectiv de 19 ori. Care este numărul minim de coșuri pe care trebuie să le înscrie în a patra serie, pentru a avea o medie de cel puțin 23 de aruncări reușite pe serie?

11 Aflați numărul natural n știind că numerele $4n+2$, 6 și 8 sunt lungimile laturilor unui triunghi.

12 Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt mai mici sau egale cu 60°. Arătați că triunghiul este echilateral.

13 Aflați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $M(5m-2, 1-m)$, din planul dotat cu un sistem ortogonal de axe xOy, să fie:

a sub axa Ox; **b** la dreapta axei Oy.

14 Determinați mulțimile:

a $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1}{2}<3x-1<5\right\}$; **b** $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,-3<4x-11<9\}$;

c $C=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,-12<2x+4<16\}$; **d** $D=\{x\in\mathbb{Z}^*\,|\,|x-2|\leq 3\}$.

15 Fie intervalele $I = (-\infty, m + 3)$ și $J = [2m - 7, \infty)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Aflați valorile lui m pentru care:

a $I \cap J = \varnothing$; **b** $I \cap J \neq \varnothing$.

16 La un concurs de matematică, de tip grilă, sunt 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scade 1 punct. Baremul minim de calificare la etapa următoare este de 70 de puncte. Care este numărul maxim de răspunsuri greșite pe care poate să le dea Matei, astfel încât să se califice mai departe?

17 Pentru fiecare dintre cazurile de mai jos, determinați numărul real a știind că:

a inecuația $|3x - a| < 4$ are soluția $S = \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$;

b inecuațiile $1 - x \leq a$ și $2x - 1 \geq 0$ sunt echivalente;

c reuniunea soluțiilor inecuațiilor $2x + a \geq 4$ și $3x - 10 < -4$ este mulțimea numerelor reale.

18 Un grup de prieteni dorește să închirieze, pentru șase zile, o mașină pentru a vizita o stațiune. O companie de închirieri auto oferă două opțiuni: 30 de lei pe zi, plus 4 lei pe kilometru parcurs, respectiv 60 de lei pe zi plus 2,5 lei pe kilometru.

a Care opțiune este mai avantajoasă, dacă stațiunea se află la 150 km distanță?

b La ce distanță maximă se poate afla stațiunea de compania de închirieri astfel încât prima opțiune să fie mai avantajoasă?

Atenție! Mașina trebuie adusă înapoi!

AUTO evaluare

1 Rezolvați inecuațiile:

a $x - \frac{1}{2} > 3$; **b** $1 - 3x \geq \frac{1}{3}$; **c** $2x - 5 \leq 11$.

(3p)

2 Rezolvați inecuația $|3x - 12| \leq 3$, $x \in \mathbb{Z}$.

(3p)

3 Media semestrială la matematică se calculează după formula $m = \frac{3 \cdot m_o + n_T}{4}$, unde m_o este media aritmetică a notelor din oral (cu două zecimale exacte), n_T este nota de la teză, iar rezultatul final se rotunjește. Notele din semestrul I ale Mariei la matematică sunt: 7, 8, 8, 9 și 10. Care este nota minimă pe care trebuie să o ia Maria la teză, ca să obțină media 9?

(3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.

Proiect
Identifică greșeala

A înțelege modalitatea de rezolvare a unui tip de exerciții nu este întotdeauna sinonim cu rezolvarea corectă a acelor exerciții. În aplicarea directă a unor strategii de rezolvare apar erori. Învățăm să rezolvăm exerciții și insistăm mai puțin pe verificarea rezultatelor sau pe verificarea efectivă, pas cu pas, a rezolvării. Realizând acest proiect, veți învăța strategii de evitare a greșelilor ce pot apărea în rezolvarea unor inecuații. Proiectul se va derula pe parcursul mai multor zile și se va realiza de către cinci echipe de elevi.

Activitatea 1. Prezentarea unui material stimul de către profesor

Unul dintre subiectele din cadrul unui test de la lecția *Inecuații*, administrat în anii anteriori unei clase a fost:

O inegalitate echivalentă cu $\frac{x}{5}>6$ este: **A** $x<1$; **B** $x>30$; **C** $x>\frac{6}{5}$; **D** $x>1$; **E** $x<30$.

Elevii care au ales greșit varianta A au efectuat operații **diferite** în cei doi membri ai inecuației: au înmulțit cu 5 membrul stâng și au scăzut 5 din membrul drept și au și schimbat semnul inegalității; elevii care au ales în mod corect variant B au efectuat înmulțirea inegalității cu 5, obținând astfel o ecuație echivalentă; variantele C și D au fost ales eronat deoarece s-au efectuat operații diferite în cei doi membri ai inecuației. Cei care au ales varianta D au schimbat sensul inegalității echivalente, cu toate că au înmulțit membrii cu numărul pozitiv 5.

Activitatea 2. Realizarea unei prezentări de către fiecare grupă

Fiecare grupă va avea de realizat și prezentat un material care să facă referire la o proprietate a relației de ordine, însoțită de două exemple de aplicare corectă a acelei proprietăți și două exemple de aplicare incorectă.

Se poate folosi modelul:

„Proprietate: $a<b,\ c>0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$."

Aplicare corectă: **1** $\frac{x}{3}<11 \Leftrightarrow \frac{x}{3}\cdot 3<11\cdot 3 \Leftrightarrow x<33$; **2** $2x<16 \Leftrightarrow 2x\cdot\frac{1}{2}<16\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<8$.

Aplicare incorectă: **1** $\frac{x}{3}<11 \Leftrightarrow \frac{x}{3}\cdot 3>11\cdot 3 \Leftrightarrow x>33$; **2** $2x<16 \Leftrightarrow 2x\cdot\frac{1}{2}<16\cdot 2 \Leftrightarrow x<32$.

Activitatea 3. Propunerea de rezolvări ale unor inecuații de către fiecare grupă

Fiecare grupă va pregăti pentru celelalte patru grupe rezolvările a câte două inecuații. Fiecare inecuație va fi însoțită de trei „rezolvări", dintre care doar una corectă. Fiecare grupă va analiza materialele propuse de către colegii din alte grupe, iar profesorul va consemna și valida justificarea alegerii rezolvării corecte.

Se pot folosi modelele:

1 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația: $2x-1<4$.

„Rezolvarea 1: inecuația se scrie echivalent: $2x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow S=\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$."

„Rezolvarea 2: inecuația se scrie echivalent: $2x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2} \Leftrightarrow S=\left[0, \frac{5}{2}\right)$."

„Rezolvarea 3: $2x-1<4 \Leftrightarrow 2x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$; cum x este natural, obținem mulțimea soluțiilor: $S=\{0, 1, 2\}$."

2 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația: $1-3x<7$.

„Rezolvarea 1: inecuația se scrie echivalent: $3x<6 \Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow S=(-\infty, 2)$."

„Rezolvarea 2: inecuația se scrie echivalent: $-3x<6 \Leftrightarrow x<-2 \Leftrightarrow S=\varnothing$."

„Rezolvarea 3: $1-3x<7 \Leftrightarrow 3x>-6 \Leftrightarrow x>-2$; mulțimea soluțiilor naturale ale inecuației este: $\Leftrightarrow S=\mathbb{N}$."

Activitatea 4. Realizarea unui minitest de către fiecare grupă

Fiecare grupă va concepe câte un minitest format din patru inecuații, pe care îl va propune spre rezolvare colegilor din celelalte echipe. Elevii vor corecta testele, vor identifica greșelile și le vor utiliza la realizarea materialului de la activitatea 5.

Activitatea 5. Crearea unei baze de date cu greșeli tipice

Fiecare grupă va realiza o „bază de date" cu greșeli tipice întâlnite în rezolvarea inecuațiilor și din greșeli posibile ce pot apărea din aplicarea incorectă a unor proprietăți sau efectuarea eronată a unor calcule cu numere reale. După validarea de către profesor, „baza de date" poate fi publicată on-line sau în revista școlii.

Recapitulare și evaluare

1 Scrieți mulțimea $A = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$ cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor ei.

2 Dacă $A = (-3, 4)$ și $B = [-1, 8)$, determinați $A \cup B$ și $A \cap B$.

3 Dintre numerele de mai jos, precizați care este element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| < 2\}$:
a 2; **b** −2; **c** 4; **d** 0.

4 Dintre numerele de mai jos, precizați care nu este element al mulțimii $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$:
a 0; **b** 3; **c** −2; **d** 1.

5 Precizați valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a $(-\infty, 4) \cup [2, +\infty) = [2, 4)$;
b $(-\sqrt{2}, 3) \cap (0, 5) = (0, 3)$;
c $[-3, 11] \cup (12, 14) = \varnothing$;
d $(0, 7) \cup [1, 9) = (0, 9)$.

6 Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:
a $2,5 \in (2, ...)$;
b $\sqrt{...} \in (2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$;
c $\frac{1}{...} \in (0,2; 0,5)$.

7 Determinați numărul elementelor fiecărei mulțimi:
a $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$;
b $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 3\}$;
c $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3 + \sqrt{2}\}$;
d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq \sqrt{2}\}$.

8 Scrieți:
a un număr rațional din mulțimea $(3, 4)$;
b un număr irațional din mulțimea $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$;
c un număr întreg din mulțimea $(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$;
d un număr natural din mulțimea $(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

9 Scrieți mulțimile sub formă de interval:
a $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 11\}$;
b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{3}\}$;
c $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$;
d $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

10 Scrieți intervalele sub formă de mulțimi folosind o proprietate comuna elementelor lor:
a $A = (-2, 3]$;
b $B = (1, 5)$;
c $C = (-\infty, 2]$;
d $D = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$.

11 Stabiliți dacă numărul $\frac{13}{2}$ se află în intervalul $\left[\frac{\sqrt{143}}{2}, \frac{\sqrt{197}}{2}\right]$.

12 Demonstrați că numărul $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$ se află în intervalul $(3, 2\sqrt{3})$.

13 Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:
a $\mathbb{N} \subset [-11, +\infty)$;
b $(1, 2) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$;
c $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}$;
d $(4, 5) \cap [4, 5] = \{4, 5\}$.

14 Determinați numărul $x \in [-2; 1]$, pentru care
$$\frac{|x|}{|x-1| + |x+2|} = 0,(4).$$

15 Asociați fiecărei litere din coloana *A* cifra corespunzătoare din coloana *B* astfel încât numărul din dreapta literei să aparțină intervalului din dreapta cifrei:

A	B
a 2	**1** $(-3, 1]$
b −3	**2** $[2, 4)$
c 4	**3** $[-3, 0)$
d 1	**4** $[2, 44)$

16 Verificați, pentru fiecare caz, dacă 3 este soluție a inecuației:
a $\frac{6-x}{2} \leq 11$; **b** $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$; **c** $3 - \frac{x}{5} \leq 4$.

17 Verificați, pentru fiecare caz, dacă −3 este soluție a inecuației:
a $\frac{1}{x-2} \geq 0$; **b** $\frac{1}{2-x} \geq 0$; **c** $\frac{2\sqrt{3}}{11-2x} < 0$.

18 Reprezentați pe axa numerelor intervalele:

a $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$; **b** $\left(2{,}5; \frac{7}{2}\right)$; **c** $[2, \sqrt{5}]$.

19 Rezolvați inecuațiile:

a $|x - 11| < 3$; **b** $|3x + 4| \le 5$; **c** $|x - 3| \le 0$.

20 Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = y + 2,\ y \in (-1, 2)\}$;

b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2z,\ z \in (-2, 3)\}$;

c $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2 - t,\ t \in (-2, 3)\}$.

21 Rezolvați inecuațiile:

a $6x - 11 > 23$;

b $4 < 3x + 12$;

c $\frac{3x}{2} + 1 \ge \frac{2}{3}$.

22 Determinați mulțimile:

a $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \le \frac{2x - 1}{3} < 5\right\}$;

b $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2} < \frac{3x + 4}{5} < 7\right\}$.

23 Determinați:

a cel mai mare număr natural din intervalul $(-\infty, 3\sqrt{3})$;

b cel mai mic număr natural din intervalul $[4\sqrt{2}, +\infty)$.

24 Scrieți:

a un interval deschis la ambele capete;

b un interval închis la ambele capete.

25 Scrieți:

a un interval nemărginit;

b un interval mărginit.

Testul 1

1 Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 4\}$. Determinați elementele mulțimilor:

(1p) **a** $B = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{a + b}{2},\ a, b \in A\right\}$;

(1p) **b** $C = \{y \mid y = \sqrt{ab},\ a, b \in A\}$;

(1p) **c** $D = \left\{z \,\middle|\, z = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}},\ a, b \in A\right\}$.

2 Scrieți sub formă de interval mulțimile:

(1p) **a** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1{,}5 < x < 7\}$;

(1p) **b** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 0\}$;

(1p) **c** $C = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2} < x\right\}$.

3 Rezolvați inecuațiile:

(1p) **a** $3x - 11 < 7$;

(1p) **b** $|3x - 11| < 7$;

(1p) **c** $\frac{-2}{3x - 11} < 0$.

Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1 Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, ..., 47\}$. Determinați elementele mulțimilor:

(1p) **a** $B = \{x \in A \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$;

(1p) **b** $C = \{y \in A \mid y = 5k,\ k \in \mathbb{N}\}$;

(1p) **c** $D = \{z \in A \mid z = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2 Scrieți sub formă de interval mulțimile:

(1p) **a** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 3\}$;

(1p) **b** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \le 2\}$;

(1p) **c** $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$.

3 Rezolvați inecuațiile:

(1p) **a** $2x + 4 > 2$;

(1p) **b** $|2x + 4| \le 2$;

(1p) **c** $\frac{-2}{2x + 4} < 0$.

Se acordă 1 punct din oficiu.