EDUARD DĂNCILĂ
IOAN DĂNCILĂ

MATEMATICĂ PENTRU PERFORMANȚĂ CLASA A VII-A

Nu îți coborî așteptările
pentru a se potrivi cu performanța ta!
Ridică-ți nivelul de performanță
pentru a se potrivi cu așteptările tale.

Ralph Marston

art
educațional

Cuprins

Argument

Această a treia carte de „Matematică pentru performanță“, cea pentru clasa a VII-a, vine să completeze seria cărților de învățătură cu acest titlu și acest tip de conținut editate deja pentru clasele a V-a și a VI-a.

În această nouă carte, împreună cu cei interesați, vom continua înaintarea pe drumul cunoașterii matematicii de concurs astfel că:

– o nouă clasă de numere, numerele iraționale, „își reclamă“ prezența;
– se accentuează diversitatea scrierii numerelor;
– se stabilesc legături subtile între proprietăți numerice și proprietăți geometrice;
– noi tehnici sunt relevate și abordate în rezolvarea problemelor;
– am încurajat tendința naturală a rezolvitorilor de elită de a trage concluzii de la particular la general;
– se accentuează latura critică a rezolvării problemelor.

Ce am făcut?

– Am respectat programa de concurs pentru matematica de clasa a VII-a.
– Am considerat această lucrare atât o continuare, cât și o evoluție a calității dialogului cu un cititor din ce în ce mai avizat.
– Am considerat mai actuală ca oricând pilda părintelui Gazetei Matematice, Ion Ionescu-Bizeț: „Voința, inițiativa, perseverența și răbdarea sunt elemente care generează succesul în matematică.“ Și am urmat-o!
– Am pregătit și prezentat o nouă strategie, a 17-a, acum accesibilă datorită cunoștințelor dobândite în clasa a VII-a:

Utilizează coordonate

– Alarmați de frecvența în creștere a enunțurilor și/sau a soluțiilor greșite la problemele propuse pentru concursuri, mai mult sau mai puțin naționale, am inițiat o vânătoare de greșeli, sub titlul „Unde este greșeala?“
– Am păstrat o diversitate substanțială a problemelor alese și prezentate în lucrare.
– Ca o exigență didactică, cea de-a doua culoare continuă să fie prezentă în demonstrații.
– Am continuat îmbogățirea portofoliului cu noi tehnici necesare, utile și accesibile unui performer în concursurile de matematică.

- Am continuat să tratăm matematica ca o componentă esențială a culturii, prezentările sub precizarea „Picătura de istorie“ fiind și acestea dovezi.
- În rezolvarea celor mai multe probleme am utilizat demonstrația ca „metodă de convingere“.
- Am pus în evidență acele soluții care se disting prin eleganța lor. Soluțiile acestor probleme au fost însoțite și de o apreciere estetică prin ștampila aplicată.
- Am considerat utilă o listă cu identitățile utilizate pe parcursul acestei lucrări.
- Am încercat să conectăm interesul rezolvitorilor performanți pentru realizările înaintașilor, provocând uneori elevii să-i imite.
- Am prezentat câteva sfaturi practice de la cei care au avut succes.

Ce nu am făcut?

- Nu ne-am lăsat sufocați de „buruienile“ care au năpădit matematica gimnaziului în ultimii ani.
- Nu am uitat că „A gândi matematica nu înseamnă a gândi doar cu numere sau cantități, ci a gândi riguros și a ști ce întrebi atunci **când pui** sau **nu pui** o întrebare“(Grigore Moisil).
- Nu am coborât standardele redactării și ale tehnoredactării pe motivul jenant: „Acum elevii sunt mari, înțeleg ei ce am vrut să spunem.“

Autorii trăiesc cu speranța – sau numai cu iluzia – că o parte dintre utilizatorii lucrărilor din seria **pentru performanță** au descoperit frumusețea matematicii și plăcerea de a învăța matematica de dragul ei. Căci matematica făcută de dragul ei este cel mai puternic izvor de matematică.

Ce aduce nou matematica de concurs în clasa a VII-a?

Noi obiecte matematice:
- identitatea, generalizarea, lema
- ceviana, transversala
- radicalul
- coordonatele, modulul

Numerație:
- numerele cu radicali
- numerele reprezentate prin litere
- clase de numere
- evidențierea rolului virgulei în tratarea unitară a numerelor reale

Calcul:
- reguli de calcul pentru numere cu radicali
- utilizarea modulului
- calcule cu numere reale divers reprezentate
- extinderea comparărilor expresiilor matematice

Măsurare:
- incomensurabilitatea unor lungimi
- calculul distanțelor
- calculul ariilor

Geometrie:
- asemănarea triunghiurilor
- utilizarea ariilor, acoperiri
- poziții particulare ale punctelor remarcabile
- poziții particulare ale dreptelor
- patrulaterul
- patrulaterele particulare: pătrat, dreptunghi, trapez, romb
- patrulaterul inscriptibil
- evidențierea relațiilor metrice pe figuri geometrice

Rezolvarea problemelor:
- o nouă strategie, a 17-a, „Utilizează coordonate“, este prezentată
- portofoliul cu tehnici este substanțial îmbogățit, corespunzător matematicii de concurs de clasa a VII-a
- utilizarea lemelor pe parcursul unor demonstrații
- generalizarea

Într-un concurs de ținută capătă o importanță determinantă

Redactarea soluției

Comunicarea în scris, la matematică, are un anumit specific.

Una este să explici oral soluția unei probleme – unde comportamentul ascultătorului poate da indicii prețioase, privind înțelegerea comunicării –, alta este să îți imaginezi ce, cum, cât din comunicarea ta prin scris chiar ajunge la cititor.

Iar la un concurs, chiar dacă cititorii tăi sunt profesori de matematică, tu consideră că vrei să explici soluția unor colegi de-ai tăi buni sau mai puțin buni la matematică.

Un aspect îngrijit în redactarea unei soluții creează în cititor o stare favorabilă înțelegerii conținutului prezentării.

Redactează soluția astfel încât să iei 10 la română!

Utilizează logica în tot ceea ce scrii și desenezi.

Utilizează cu moderație simbolurile matematice și dă explicații pe parcursul soluției, astfel încât s-o înțelegi și după 10 ani.

Dă dovadă că ți-ai însușit toate noțiunile utilizate.

O redactare impecabilă va atrage atenția și aprecierea corectorilor și a evaluatorilor, îți va aduce aproape sigur puncte în plus la aprecierea rezolvării.

Când o soluție este elegantă?

Fiecare strădanie de a rezolva o problemă este o căutare șovăitoare în care rezolvitorul seamănă cu un detectiv intelectual care urmărește să descopere „făptașul“, interogând urme și pe sine însuși.

Specific matematicii, în rezolvarea unei probleme, două tipuri de raționament nu pot fi separate: **inductiv** prin care apare mai întâi o concluzie plauzibilă, justificată apoi printr-un raționament **deductiv** (ce are la bază implicația logică).

Juriul unui concurs va aprecia în plus o soluție pe care o va considera elegantă.

Cum este o soluție elegantă?

Soluția care:

– utilizează puține rezultate prealabile;
– stabilește un rezultat surprinzător, neașteptat;
– se bazează pe concepte originale;
– face apel la o metodă care poate fi generalizată;
– principiul mijloacelor și metodelor minime este prezent;
– are mari șanse să fie catalogată ca elegantă.

Pe parcursul acestei lucrări, soluțiilor susceptibile de a fi apreciate ca elegante li se va „pune ștampila“:

Am considerat oportun să punctăm în această lucrare care sunt, cum sunt tipurile de rezolvări apreciate de un juriu avizat.

Vă oferim un model de redactare a unei soluții scrise.

PROBLEMĂ

Se dau numerele 51, 36, 3, 15, 9, 17, 63, 6, 53, 42, 33 și 72.
Găsiți-le pe cele care dau suma 100.

Soluție

Pornim de la următoarele observații:

– numerele date sunt numere de la 3 la 72;
– aproape toate, mai puțin 17 și 53 sunt numerele divizibile cu 3;
– suma 100 nu e divizibilă cu 3.

Utilizând cele trei observații, deducem: cel puțin unul dintre numerele 17 și 53 sunt termeni ai sumei 100.

Mai observăm că: $100 = 33 \cdot 3 + 1$; $17 = 5 \cdot 3 + 2$; $53 = 17 \cdot 3 + 2$ ceea ce ne conduce la concluzia că ambele numere 17 și 53 fac parte din suma 100. Într-adevăr $17 + 53 = 23 \cdot 3 + 1$.

Printre celelalte 10 numere trebuie căutate câteva cu suma $100 - 53 - 17 = 30$.

Firesc, excludem din listă numerele mai mari decât 30 și atunci rămân numerele 3, 6, 9 și 15.

Prin încercări găsim că $6 + 9 + 15 = 30$.

Așadar numerele cu suma 100 sunt 6, 9, 15, 17 și 53.

Verificare: $6 + 9 + 15 + 17 + 53 = 100$.

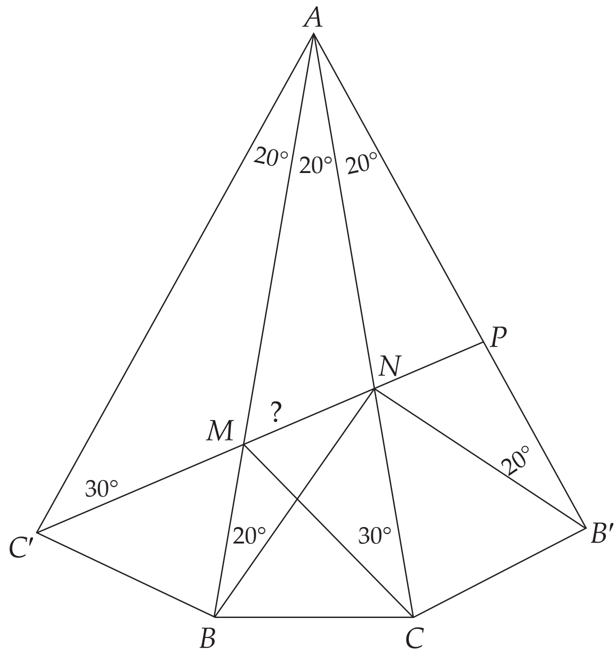
Notă: Am utilizat un exemplu de problemă care se poate rezolva cu cunoștințe de clasa a V-a. Suntem convinși că acest model de redactare interesează și pe elevii din clasele mai mici.

Problema următoare are multiple și diverse soluții, care de care mai interesante și am ales ca model soluția spectaculoasă a unui elev, soluție care îndeplinește condițiile de a fi și elegantă.

PROBLEMĂ

Se consideră un triunghi ABC cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) = 20°$.
Fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$, astfel încât $m(\sphericalangle ACM) = 30°$ și $m(\sphericalangle ABN) = 20°$.
Se cere $m(\sphericalangle AMN)$.

Soluție



Se construiesc încă două triunghiuri ABC' și ACB' congruente cu ABC. Ele au fost obținute în urma „răsturnării“ triunghiului ABC în jurul laturilor AB respectiv AC.

Mai notăm cu P mijlocul laturii AB'.

Deoarece triunghiul ANB' este isoscel ($m(\sphericalangle NAB') = m(\sphericalangle NB'A) = 20°$) rezultă că $NP \perp AB'$.

Deoarece $m(\sphericalangle B'AC) + m(\sphericalangle AC'M) = 90°$ rezultă că $C'M \perp AB'$ și pentru că $AC' = AB'$, $C'M \perp AB'$ chiar în P, în mijlocul lui AB'.

Așadar, punctele C', M, N și P aparțin perpendicularei unice în P pe AB', deci sunt coliniare.

În triunghiul dreptunghic AMP cu $m(\sphericalangle MAP) = 40°$ se calculează $m(\sphericalangle AMP) = 50°$.

Generalizarea unui rezultat, a unui enunț

În secolul al XIX-lea, Carl Jacobi, matematician german, remarca:

„Man muss immer generalisieren."

Omul trebuie tot timpul să generalizeze, era convingerea lui, și de-a lungul secolelor, prin atitudinea lor, mulți matematicieni au fost și sunt de acord că nu poți face cuceriri științifice decât prin generalizări.

Așa au fost descoperite formule, algoritmi, tehnici, leme, teoreme, strategii.

Acum, după ani de acumulări, creativitatea unui competitor este pe cale să dea roade.

Specificul aptitudinilor matematice se reflectă în primul rând în privința capacității de a generaliza.

Dar subliniem: valabilitatea unei generalizări trebuie susținută de o riguroasă și solidă demonstrație. Lui Andrew Willes i-au trebuit doi ani și peste 1000 de pagini de demonstrație ca să ajungă la probarea completă a remarcabilei conjecturi a lui Fermat:

„$x^n + y^n = z^n$, nu poate fi valabilă pentru x, y, z și n numere întregi, iar n mai mare decât 2."

În fapt o generalizare a observației că pentru numere întregi $x^3 + y^3 \neq z^3$.

Pe parcursul acestei lucrări veți întâlni atât situații de prezentare a unor generalizări făcute de înaintași, cât și situații în care veți fi provocat să faceți generalizări.

Pentru că, repetăm, „Nu putem face cuceriri științifice, decât prin generalizare" (H. Poincaré).

Sfaturi practice de la cei care au avut succes

În cele ce urmează vă prezentăm câteva proceduri care s-au dovedit oportune în procesul de rezolvare.

1. La rezolvarea unei probleme în care apare o mediană este recomandabil să prelungim mediana cu un segment congruent cu ea. Se pot astfel exploata, de cele mai multe ori cu succes proprietățile paralelogramului astfel apărut.

2. Dacă o expresie algebrică este sau poate deveni simetrică, atunci un ajutor important poate fi presupunerea unei ordonări printre elementele ce alcătuiesc simetria. Această presupunere nu modifică generalitatea problemei.

3. Dacă se cere o relație geometrică cu anumite rapoarte care nu apar pe aceeași dreaptă, este recomandabil ca acestea să fie proiectate (chiar și oblic uneori) pe o aceeași dreaptă.

4. Când demonstrația îndeamnă la substituții, se preferă găsirea de substituții pentru numitori (dacă aceștia sunt prezenți).

5. Stabilirea tipului de relație de ordonare (>, <, =) dintre două expresii algebrice poate fi amânată (cu obiectiv final economisirea timpului de lucru) prin utilizarea unui semn (personal) incert între expresiile din perechile de comparat, echivalente reieșite din preluări algebrice, până când se relevă o relație și semnul incert va fi înlocuit, peste tot, cu cel cert, relevat de ultima relație.

6. Cum veți remarca, în matematica de concurs inegalitățile capătă o importanță din ce în ce mai mare.

Adeseori, în inegalitățile condiționate în care sunt „prinse" trei numere x, y, z condiționarea lor sugerează ideea că: există încă un număr, să-i zicem a, pentru care două dintre numerele x, y, z sunt situate pe axa de o parte a lui a, celălalt de cealaltă parte.

Concret: Condiționarea $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ne-ar conduce la $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, condiționarea $x + y + z = 3$ ne-ar conduce la $a = 1$.

7. Când nu găsim o cale de rezolvare, considerarea și analizarea unor cazuri particulare oferă, deseori, indicii prețioase pentru alegerea strategiilor de urmat.

8. La fel, executarea unui desen exact, conform ipotezei, poate sugera adesea căi de rezolvare.

9. Dacă indiciile sugerează utilizarea congruenței numerelor întregi alegerea modulo m cu care vom lucra depinde de abilitatea rezolvitorului. De cele mai multe ori este un număr prim sau o putere a unui număr prim.

Întotdeauna bine-venită

O recapitulare

Așa cum v-am obișnuit, vă propunem un buchet de probleme, atent selecționate, prin care să vă reamintiți, (re)utilizându-le, noțiuni, tehnici, principii și strategii achiziționate pe parcursul claselor anterioare, toate folositoare și în clasa a VII-a, și în clasele următoare.

În selecția problemelor propuse am ținut seama de întreaga problematică a matematicii pentru performanță din clasa a VI-a.

1. Un număr natural n împărțit la k, respectiv $k+1$, dă același rest r. Demonstrați că și restul împărțirii lui n la $k(k+1)$ este r.

2. Determinați numerele naturale x, a, b, unde x și $x-1$ sunt baze de numerație pentru care:

$$\overline{234}_x + \overline{456}_{(x-1)} = \overline{4ab}_{10}.$$

3. Aflați a 2018-a zecimală a numărului $\frac{1}{6}+\frac{7}{13}$, apoi calculați suma primelor 2018 zecimale.

4. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8 am scris două numere, un pătrat perfect și un cub perfect ale aceluiași număr. Fiecare cifră am folosit-o o singură dată și numai într-unul dintre numere.
Știți care sunt numerele?

5. Numărul $2n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) are 28 de divizori, numărul $3n^2$ are 24 de divizori. Câți divizori are $6n^2$?

6. Arătați că numerele x, y, z sunt direct proporționale cu numerele nenule a, b, c, dacă și numai dacă $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$.

7. Utilizați teorema împărțirii cu rest pentru a demonstra mica teoremă a lui Fermat:

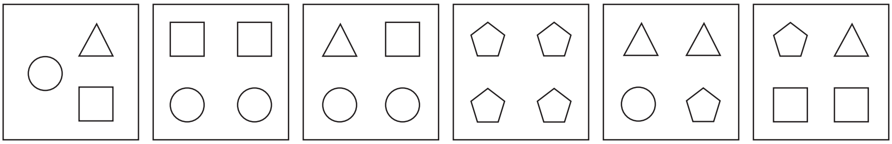
Dacă p este un număr prim și $p \nmid a$, $a \in \mathbb{N}^*$, atunci $p \mid a^{p-1}-1$.

8. Demonstrați că există un singur număr natural de forma

$$A = n(n^2+4)(n^2+6),\ x \in \mathbb{N}^*$$

care are exact 8 divizori.

9. Figurile cerc, pentagon, pătrat și triunghi reprezintă fiecare un număr natural, iar conținutul celor șase platouri valorează, într-o ordine oarecare, 15, 21, 24, 27, 30 și 45.



Verificați afirmațiile:

a) Cel de-al doilea platou valorează 24 sau 30 de puncte.

b) Triunghiul reprezintă numărul 3.

c) Pătratul reprezintă numărul 6.

10. 49 de băieți se așază într-o formație de 7×7. Pe fiecare linie se consideră cel mai scund, iar dintre cei șapte „cel mai scund de pe o linie“, se alege cel mai înalt.

De pe fiecare coloană se alege cel mai înalt, iar dintre cei șapte „cel mai înalt de pe o coloană“, se alege cel mai scund.

Compară înălțimea celui mai înalt dintre cei șapte scunzi, cu a celui mai scund dintre cei șapte cei mai înalți.

11. O mulțime M de numere raționale are următoarele proprietăți:

1) $6 \in M,\ 12 \in M$;

2) dacă $x \in M,\ y \in M$, atunci $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) \in M$;

3) dacă $(2x+3y) \in M$, atunci $(x+y) \in M$.

Arătați că:

a) Mulțimea M conține cel puțin două numere naturale consecutive;

b) Mulțimea conține cel puțin trei numere prime;

c) Există $a, b, c, d \in M$ distincte două câte două, astfel încât $a+b=c+d$.

12. Utilizați principiul extremal pentru a rezolva problema:

Într-un turneu de tenis fiecare dintre jucători joacă câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți.

Fiecare participant a obținut cel puțin câte o victorie.

Demonstrați că există un grup de 3 tenismeni A, B, C, astfel încât A l-a învins pe B, B l-a învins pe C și C l-a învins pe A.

13. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $6^n - 1 \mid 7^n - 1$.

14. Calculați suma:

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2n(2n + 1)$$

dacă știm că

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = a.$$

15. Dacă $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ și $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sunt numere naturale nenule în relația:

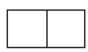
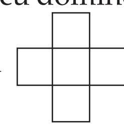
$$\frac{2x_1}{x_2} = \frac{3x_2}{2x_3} = \ldots = \frac{nx_{n-1}}{(n-1)x_n} = \frac{x_n}{nx_1}$$

atunci $\frac{n(n+1)}{2} \,\Big|\, (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$.

16. Aflați zecimea numărului

$$m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100}$$

în scrierea lui zecimală.

17. O tablă de 75×75 pătrățele poate fi acoperită cu dominouri și pentaminouri, adică piese de forma  și forma  ?

18. Expresia $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \ldots * \frac{998}{999} * \frac{999}{1000}$ conține 999 de fracții.

Demonstrați că se pot înlocui toate cele 998 de steluțe prin semne de operații aritmetice, astfel încât valoarea expresiei obținute este 0.

19. Determinați ultimele trei zecimale ale numărului $\frac{2017}{2^{2018}}$.

20. De când era mic, lui Cornel îi plăcea să numere din 1 în 1, din 2 în 2, din 3 în 3… Astăzi a împlinit 13 ani, s-a apucat, ca de obicei, să numere și a ales un pas mai mare decât 1. A dat peste vârsta mamei, 34 ani, și peste vârsta bunicului, 69 ani. La un moment dat s-a plictisit.
Ar vrea totuși să știe dacă ar fi nimerit și peste 2017?

21. Punctele A, B, C sunt vârfurile unui triunghi cu oricare două laturi de lungimi diferite.
În câte moduri poate fi ales un punct D (în planul triunghiului ABC) astfel încât mulțimea punctelor $\{A; B; C; D\}$ să admită o axă de simetrie.

22. Câte triplete de numere, în care unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două găsim în mulțimea $\{1; 2; 3; \ldots; 99; 100\}$?

23. Florin i se adresează lui Tudor:
— În prezent am o vârstă de trei ori mai mare decât vârsta pe care o aveai când eu aveam vârsta ta de acum. Iar când tu vei avea vârsta mea, suma vârstelor noastre va fi de 98 de ani.
Puteți deduce vârstele din prezent ale celor doi?

24. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB = BC)$. Fie $M \in BC$ astfel că $AM = AC$ și $N \in AB$ astfel că $MN = AC$.
Știind că $m(\sphericalangle NMB) = 30°$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

25. În triunghiul ABC cu medianele AD și BE, $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle EBC) = 30°$. Demonstrați că ΔABC este echilateral.

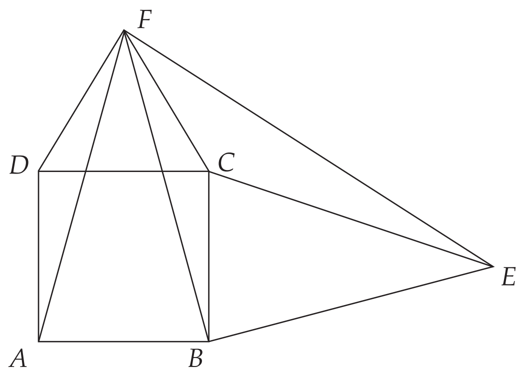
26. În triunghiul ABC (cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) = 100°$) pe semidreapta AB se ia punctul D, astfel încât $AD = BC$.
Determinați $m(\sphericalangle ADC)$.

27. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Se consideră punctele $D \in (AB)$ și $E \in (CD)$ astfel încât $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle BED$.
Demonstrați că $EC = 2AD$.

28. Utilizați principiul extremal pentru a demonstra că în $\mathbb{Z}$:
Dacă $(a; b) = d$, atunci există numere u, v astfel încât $ua + bv = d$.

29. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, iar punctele D și E pe latura $[BC]$, astfel încât $m(\sphericalangle CAD) = 10°$, iar $(AE$ este bisectoarea $\sphericalangle BAD$. Arătați că $AD = CE$.

30. În figura alăturată $ABCD$ este un pătrat, triunghiul DCF este echilateral, iar triunghiul ECB este isoscel cu măsura unghiurilor de la bază de $75°$. Calculați $m(\sphericalangle BFE)$.



31. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ impar, numărul $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ are ultimele două cifre în formația $\overline{28}$.

32. În fiecare pătrățel al unei table de $m \times n$ există un număr, astfel încât suma numerelor de pe oricare linie și de pe oricare coloană este egală cu 1.
Demonstrați cu ajutorul unui invariant că $m = n$.

33. Produsul a 2021 de numere întregi este 2021.
Ce valori poate lua suma acestor 2021 de numere?

34. Comparați numerele $(a^{n+1} + 1)(a^n + 1)$ și $(a^{n+2} + 1)(a^{n-1} + 1)$, când $a > 0$.

35. Pe o tabletă de lemn (sangaku) suspendată în templul din Japonia *Abe no Manjuim*, este propusă următoarea problemă:

Un număr n de vizitatori, vizitează altarul.
Știm numai că:

1) $\frac{7}{9}n$ este un număr natural ale cărui ultime două cifre sunt $\overline{68}$.

2) $\frac{5}{8}n$ este un număr natural ale cărui ultime două cifre sunt $\overline{60}$.

Aflați cea mai mică valoare posibilă a lui n.