

Marius Perianu

Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

I



Algebră

I. Numere reale

I.1.	Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	8
I.2.	Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Mulțimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă.	12
	Teste de evaluare	21
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	23
I.3.	Reguli de calcul cu radicali	25
I.4.	Adunarea și scăderea numerelor reale	30
I.5.	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Puteri cu exponent întreg. Ordinea efectuării operațiilor	34
I.6.	Raționalizarea numitorului unei fracții	42
I.7.	Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive	48
I.8.	Ecuția de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	51
	Teste de evaluare	55
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	57
I.9.	Probleme cu caracter aplicativ	59
I.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	61

Geometrie

II. Patrulatere

II.1.	Patrulaterul convex	66
II.2.	Paralelogramul	68
II.3.	Linia mijlocie în triunghi	73
	Teste de evaluare	77
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	79
II.4.	Dreptunghiul	81
II.5.	Rombul	85
II.6.	Pătratul	88
II.7.	Trapezul. Linia mijlocie în trapez	91
	Teste de evaluare	95
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	97

II.8.	Ariile figurilor geometrice	99
	Teste de evaluare	105
	Fișă pentru portofoliul individual (G3)	107
II.9.	Probleme cu caracter aplicativ	109
II.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	111
III. Cercul		
III.1.	Coarde și arce de cerc	116
III.2.	Unghi înscris în cerc	120
III.3.	Tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc	124
III.4.	Poligoane regulate înscrise într-un cerc	128
III.5.	Lungimea cercului și aria discului	130
	Teste de evaluare	133
	Fișă pentru portofoliul individual (G4)	135
III.6.	Probleme cu caracter aplicativ	137
III.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	138
IV. Variante de subiecte pentru teză		
	Varianta 1	142
	Varianta 2	142
	Varianta 3	143
	Varianta 4	143
	Varianta 5	144
	Varianta 6	145
	Soluții	146

Competențe generale și specifice

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

- 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}
- 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
- 1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
- 1.4. Identificarea patruleterelor particulare în configurații geometrice date
- 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
- 1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
- 1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

- 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
- 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
- 2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
- 2.4. Descrierea patruleterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
- 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
- 2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
- 2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

- 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
- 3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
- 3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
- 3.4. Utilizarea proprietăților patruleterelor în rezolvarea unor probleme
- 3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
- 3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
- 3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

- 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
- 4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
- 4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
- 4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patruletere
- 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
- 4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
- 4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

- 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
- 5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
- 5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
- 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
- 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
- 5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
- 5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

- 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
- 6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
- 6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
- 6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patruletere
- 6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
- 6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
- 6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

Algebră

8	I.1	Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect
12	I.2	Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Mulțimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă.
21		Teste de evaluare
23		Fișă pentru portofoliul individual A1
25	I.3	Reguli de calcul cu radicali
30	I.4	Adunarea și scăderea numerelor reale
34	I.5	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Puteri cu exponent întreg. Ordinea efectuării operațiilor
42	I.6	Raționalizarea numitorului unei fracții
48	I.7	Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive
51	I.8	Ecuția de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$
55		Teste de evaluare
57		Fișă pentru portofoliul individual A2
59	I.9	Probleme cu caracter aplicativ
61	I.10	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

I

Numere reale



I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Pătrat perfect. Un număr natural a se numește *pătrat perfect* dacă există un număr natural n astfel încât $n^2 = a$.

Rădăcina pătrată. Fie a un număr natural pătrat perfect. Numărul natural n cu proprietatea $n^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului a și se notează $n = \sqrt{a}$.

Exemple: $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{n^2} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este n , și anume \sqrt{n} și $-\sqrt{n}$. Evident, numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple: 1 $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$. 2 $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{(4ab^2)^2} = |4ab^2| = 4b^2|a|$.

Exersare



1 Completați următorul tabel, știind că x este număr natural:

x	2	5		8			11		25
x^2			9		36	49		144	

2 Dintre următoarele numere, alegeți-le pe cele care sunt pătrate perfecte:
8, 16, 26, 49, 91, 121, 150, 196, 200, 324.

3 a Scrieți pătratele perfecte de două cifre.

b Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 300 și 500.

4 Determinați numerele întregi care au pătratul egal cu:

a 16; b 81; c 144; d 576; e 2025.

5 Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:

a 9; b 36; c 64; d 121; e 400;
f $3^2 \cdot 16$; g $25 \cdot 81 \cdot 7^2$; h $4^5 \cdot 4^4$; i $25^3 \cdot 7^{10}$; j $121 \cdot 49^3$.

6 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a $\sqrt{64} = 8$; b $\sqrt{100^2} = 100$; c $\sqrt{(-5)^2} = -5$; d $\sqrt{81} = 9$;
e $\sqrt{5^2} = 5$; f $\sqrt{(-7)^2} = 7$; g $\sqrt{(-3)^2} = -3$; h $\sqrt{16} = \sqrt{4}$.

7 Efectuați calculele:

a $\sqrt{7^2}$;

b $\sqrt{9^2}$;

c $\sqrt{15^2}$;

d $\sqrt{20^2}$;

e $\sqrt{(-10)^2}$;

f $\sqrt{(-16)^2}$;

g $\sqrt{(-30)^2}$;

h $\sqrt{(-45)^2}$.

8 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$;

b $a = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$;

c $a = 9^2 + 12^2$;

d $a = 7^2 + 24^2$.

9 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 49$;

b $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 31$;

c $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2\,011$;

d $a = (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2\,012) + 1\,007$;

e $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 24) + 25$;

f $a = (3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 147) + 1\,225$.

10 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect, după care aflați \sqrt{a} :

a $a = (1 + 2 + 3 + \dots + 50) - 25 \cdot 2$;

b $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 120 + 4 \cdot 121$;

c $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 225) - 225^2$;

d $a = 3 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 99) - 5\,000$;

e $a = (60 \cdot 4 + 60^2) + (64^2 - 64 \cdot 43)$;

f $a = 101^2 - 2 \cdot 99 \cdot 101 + 99^2$.

11 Dați trei exemple de numere naturale care sunt atât pătrate perfecte, cât și cuburi perfecte.

12 Calculați:

a $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$;

b $\sqrt{1} + \sqrt{25} - \sqrt{0}$;

c $\sqrt{36} + \sqrt{64}$;

d $\sqrt{100} - \sqrt{49}$.

Consolidare



13 Calculați, apoi verificați rezultatele folosind minicalculatorul:

a $\sqrt{169}$;

b $\sqrt{196}$;

c $\sqrt{289}$;

d $\sqrt{361}$;

e $\sqrt{441}$;

f $\sqrt{529}$;

g $\sqrt{676}$;

h $\sqrt{729}$.

14 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, punând în evidență faptul că sunt situate între pătratele a două numere naturale consecutive:

a 8 ;

b 12 ;

c 24 ;

d 95 ;

e 250 ;

f 500 .

15 Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele numere nu sunt pătrate perfecte,

a $a = 5n + 13$;

b $b = 10n + 8$;

c $c = 10n + 12$;

d $d = 5n + 18$.

Rezolvare: a. Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5, deci ultima cifră a lui a poate fi 3 sau 8. Cum ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă că a nu este pătrat perfect.

16 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, unde $m \in \mathbb{N}$:

a $a = 1^m + 5$;

b $a = 5^m + 7$;

c $a = 6^m + 6$;

d $a = 10^m + 13$;

e $a = 15^m + 18$;

f $a = 31^m + 31$.

17 Arătați că numărul $N = \sqrt{5^{2n+1} \cdot 9^{n+1} + 25^n \cdot 3^{2n+2} \cdot 11}$ este natural, oricare ar fi numărul natural n .

18 Arătați că numerele următoare nu sunt pătrate perfecte:

a $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$;

b $b = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{153}$;

c $c = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{17})$;

d $d = 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{83})$.

19 Calculați:

a $\sqrt{2^4}$;	b $\sqrt{3^4}$;	c $\sqrt{11^6}$;	d $\sqrt{23^8}$;
e $\sqrt{31^8}$;	f $\sqrt{6^{14}}$;	g $\sqrt{11^{22}}$;	h $\sqrt{59^{12}}$;
i $\sqrt{5^{28}}$;	j $\sqrt{9^{24}}$;	k $\sqrt{20^{20}}$;	l $\sqrt{12^{44}}$.

20 Calculați:

a $\sqrt{3^4 \cdot 5^6}$;	b $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^6}$;	c $\sqrt{5^{10} \cdot 7^{20}}$;	d $\sqrt{3^{14} \cdot 7^4 \cdot 17^8}$;
e $\sqrt{2^8 \cdot 7^2}$;	f $\sqrt{2^{10} \cdot 5^{20} \cdot 11^{30}}$;	g $\sqrt{3^{52} \cdot 11^{40}}$;	h $\sqrt{9^{10} \cdot 11^{12} \cdot 13^{14}}$.

Rezolvare: f. $\sqrt{2^{10} \cdot 5^{20} \cdot 11^{30}} = \sqrt{(2^5)^2 \cdot (5^{10})^2 \cdot (11^{15})^2} = \sqrt{(2^5 \cdot 5^{10} \cdot 11^{15})^2} = 2^5 \cdot 5^{10} \cdot 11^{15}$.

21 Calculați:

a $\sqrt{(-29)^2}$;	b $\sqrt{(-29)^4}$;	c $\sqrt{(-29)^8}$;	d $\sqrt{(-19)^2}$;
e $\sqrt{(-51)^4}$;	f $\sqrt{(-72)^2}$;	g $\sqrt{(-2)^4}$;	h $\sqrt{7^{42}}$;
i $\sqrt{2^{2000}}$;	j $\sqrt{3^{2012}}$;	k $\sqrt{(-6)^{2012}}$;	l $\sqrt{(-7)^{7700}}$.

22 Folosind descompunerea în produs de puteri de factori primi, calculați:

a $\sqrt{576}$;	b $\sqrt{625}$;	c $\sqrt{324}$;	d $\sqrt{400}$;
e $\sqrt{900}$;	f $\sqrt{2025}$;	g $\sqrt{3600}$;	h $\sqrt{5625}$.

23 Folosind minicalculatorul, calculați:

a $\sqrt{6724}$;	b $\sqrt{8281}$;	c $\sqrt{20164}$;	d $\sqrt{12100}$;
e $\sqrt{64516}$;	f $\sqrt{84100}$;	g $\sqrt{112896}$;	h $\sqrt{164836}$.

24 Calculați:

a $\sqrt{25} + \sqrt{36} - \sqrt{49}$;	b $\sqrt{100} \cdot \sqrt{16} - \sqrt{144}$;
c $3 \cdot \sqrt{225} + 12\sqrt{121} - \sqrt{169}$;	d $5\sqrt{81} - \sqrt{64} \cdot \sqrt{196} + 2\sqrt{100}$;
e $\sqrt{576} - \sqrt{625} + \sqrt{729} - \sqrt{841} + \sqrt{900}$;	f $\sqrt{6400} - \sqrt{2025} + \sqrt{3364} - \sqrt{5184} - \sqrt{441}$.

25 Calculați:

a $\sqrt{2304} \cdot (\sqrt{225} - \sqrt{1225}) + \sqrt{1600}$;	b $\sqrt{5 \cdot \sqrt{25}} + \sqrt{7 \cdot \sqrt{49}} - \sqrt{9 \cdot \sqrt{16}}$;
c $\sqrt{1+7 \cdot \sqrt{25}} - \sqrt{11 \cdot \sqrt{36} - 2} + \sqrt{23 \cdot \sqrt{9} + 3 \cdot \sqrt{16}}$;	d $\sqrt{\sqrt{144} + 13} + \sqrt{3 \cdot \sqrt{324} + 7 \cdot \sqrt{225}} - \sqrt{64 - 7}$.

26 Calculați:

a $\sqrt{5^3 \cdot 5}$;	b $\sqrt{7^4 \cdot 4}$;	c $\sqrt{3^4 \cdot 5^2 \cdot 36}$;
d $\sqrt{144 \cdot 3^2 \cdot 64}$;	e $\sqrt{21^2 \cdot 23^2}$;	f $\sqrt{9^2 - 6^2 + 2^2}$;
g $\sqrt{64^2 - 63^2 + 4^2 + 1^2}$;	h $\sqrt{2^6 \cdot (7^2 - 2^4 \cdot 3)}$;	i $\sqrt{5 \cdot (9^2 - 6^2)}$.

27 Efectuați calculele:

a $\sqrt{2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 11}$;	b $\sqrt{7^4 \cdot 45 + 7^4 \cdot 39 - 7^4 \cdot 3}$;	c $\sqrt{5^2 \cdot 11 + 19 \cdot 5^2 + 5^2 \cdot 6}$;
d $\sqrt{3^4 \cdot 19 - 3^4 \cdot 10}$;	e $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 + 2^2 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 3^3}$;	f $\sqrt{2^4 \cdot 5^2 + 2^3 \cdot 5 + 1}$;
g $\sqrt{3^4 + 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 5^4}$;	h $\sqrt{11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 15 + 15^2}$;	i $\sqrt{48^2 - 2 \cdot 48 \cdot 13 + 13^2}$.

28 Aflați x din relațiile:

$$\text{a } \frac{x}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}};$$

$$\text{b } \frac{\sqrt{25}}{x} = \frac{16}{\sqrt{64}};$$

$$\text{c } \frac{0,5 \cdot \sqrt{4}}{2^3 - 2^2} = \frac{x}{3^3 - 3^2 - 2};$$

$$\text{d } \frac{\sqrt{700 - 5\sqrt{225}}}{\sqrt{180 + \sqrt{2025}}} = \frac{3\sqrt{200 + \sqrt{625}}}{x}.$$

29 Determinați numerele naturale x care verifică egalitățile:

$$\text{a } 2^x = \sqrt{4};$$

$$\text{b } 2^x = \sqrt{16};$$

$$\text{c } 3^x = \sqrt{81};$$

$$\text{d } \sqrt{1+2+3+\dots+8} = 6^x;$$

$$\text{e } 4^x = \sqrt{1+3+3 \cdot 4+3 \cdot 4^2+\dots+3 \cdot 4^{51}};$$

$$\text{f } 5^x = \sqrt{1+4+4 \cdot 5+4 \cdot 5^2+\dots+4 \cdot 5^{2011}};$$

$$\text{g } 6^x = \sqrt{6^4 - 5 \cdot 6^3 - 5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 6 - 5};$$

$$\text{h } 3x = \sqrt{3^{2012} - 2 \cdot 3^{2011} - 2 \cdot 3^{2010} - \dots - 2 \cdot 3 - 2}.$$

Aprofundare



30 Calculați:

$$\text{a } \sqrt{972 - 3 \cdot \sqrt{576}} + \sqrt{1255 - 11 \cdot \sqrt{441}};$$

$$\text{b } \sqrt{3258 + 18 \cdot \sqrt{361}} + \sqrt{5000 + 40 \cdot \sqrt{1225}};$$

$$\text{c } \sqrt{6525 - 15 \cdot \sqrt{3600}} - \sqrt{905 - 20 \cdot \sqrt{196}}$$

$$\text{d } \sqrt{673 - 12 \cdot \sqrt{1024}} + \sqrt{891 + 11 \cdot \sqrt{324}}.$$

31 Există numere de forma \overline{aa} care să fie pătrate perfecte?

32 Arătați că numărul $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2011 + 3$ nu este pătrat perfect.

33 Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a } 2^{4n+2};$$

$$\text{b } 9^{n+1};$$

$$\text{c } 7^{6n};$$

$$\text{d } 15^{n^2+n}.$$

34 Se consideră numerele $A = \overline{ab}$ și $B = \overline{ba}$, unde a și b sunt cifre nenule.

a Scrieți toate numerele A care sunt pătrate perfecte;

b Scrieți cel mai mare număr A , pentru care $\sqrt{A+B}$ este număr natural.

35 Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{aa} + \overline{bb}$ să fie pătrat perfect.

36 Determinați numărul natural \overline{ab} pentru care numărul $x = \sqrt{\overline{ab} + \overline{ba} + 4a + 4b}$ este natural.

37 Determinați numărul natural \overline{ab} pentru care numărul $x = \sqrt{\overline{ab} + 2 \cdot \overline{ba} + a - 8b}$ este natural.

Probleme de șapte stele



38 Determinați numerele naturale de forma $A = \overline{46ab}$ și $B = \overline{2xyz}$, care sunt pătrate perfecte.

39 Fie n un număr natural nenul. Arătați că numărul $a = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ nu este pătrat perfect.

40 Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{41} - 49\right)\left(\frac{y}{41} - 49\right)} \in \mathbb{N}$.