

Marius PERIANU
Grațian SAFTA
Costel ANGHEL

ESENȚIAL
Matematică

clasa a VIII-a

II

art
educațional

CUPRINS

ALGEBRĂ Capitolul 1. Funcții

1.1. Noțiunea de funcție	7
1.2. Funcții definite pe mulțimi finite	12
1.3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$	15
<i>Teste de evaluare</i>	21
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A1)</i>	25
1.4. Probleme cu caracter aplicativ	27

ALGEBRĂ Capitolul 2. Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații

2.1. Ecuații echivalente cu ecuația de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$	33
2.2. Ecuația de gradul întâi cu două necunoscute	37
2.3. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute	40
2.4. Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută	43
2.5. Inecuații de gradul întâi cu o necunoscută	56
2.6. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, inecuațiilor și al sistemelor de ecuații	47
<i>Teste de evaluare</i>	53
<i>Fișă pentru portofoliul individual (A2)</i>	55

GEOMETRIE Capitolul 3. Poliedre

3.1. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic	59
3.2. Cubul	64
3.3. Prisma regulată	68
<i>Teste de evaluare</i>	73
<i>Fișă pentru portofoliul individual (G1)</i>	75
3.4. Piramida regulată	77
3.5. Trunchiul de piramidă regulată	82
<i>Teste de evaluare</i>	87
<i>Fișă pentru portofoliul individual (G2)</i>	89
3.6. Probleme cu caracter aplicativ	91

GEOMETRIE Capitolul 4. Corpuri rotunde

4.1. Cilindrul	97
4.2. Conul circular drept	101
4.3. Trunchiul de con circular drept	105
4.4. Sfera	109
<i>Teste de evaluare</i>	112
<i>Fișă pentru portofoliul individual (G3)</i>	113
4.5. Probleme cu caracter aplicativ	115

SINTEZE **Capitolul 5. Subiecte pentru evaluările finale**

5.1. Variante de subiecte pentru teză	119
5.2. Variante de subiecte pentru evaluarea finală	122
5.3. Variante de subiecte pentru examenul de Evaluare Națională	127

Soluții	139
----------------------	-----

CAPITOLUL

Funcții

- 1.1. Noțiunea de funcție
- 1.2. Funcții definite pe mulțimi finite
- 1.3. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Teste de evaluare

Fișă pentru portofoliul individual (A1)

- 1.4. Probleme cu caracter aplicativ

Competențe specifice vizate

1. Recunoașterea unor corespondențe care sunt funcții;
2. Utilizarea valorilor unor funcții în rezolvarea unor ecuații și a unor inecuații;
3. Reprezentarea în diverse moduri a unor corespondențe și/ sau a unor funcții în scopul caracterizării acestora;
4. Exprimarea prin reprezentări grafice a unor noțiuni de geometrie plană.

Funcții

Tema 1.1.

Noțiunea de funcție

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y = f(x) \in B$.

Prin $f : A \rightarrow B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B . Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției f , mulțimea B se numește *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f , iar procedeul (regula) $y = f(x)$ se numește *legea de corespondență* a funcției f . Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției f în punctul x* .

Imaginea funcției. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. *Imaginea* (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea: $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\text{Im } f \subset B$.

Putem scrie și astfel: $\text{Im } f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Graficul funcției. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numește *graficul funcției f* . Avem și $G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$.

Funcția numerică este o funcție al cărei domeniu de definiție și domeniu de valori ale unei funcții sunt submulțimi ale lui \mathbb{R} (mulțimi de numere).

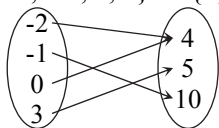
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x, y) \in G_f$ îi putem asocia un punct $M(x, y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x, y)$, cu $(x, y) \in G_f$ se numește *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f .

Funcții egale. Două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ sunt *egale* dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Notăm: $f = g$.

Moduri de definire a unei funcții. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1. Printr-o *diagramă*.

$$f : \{-2; -1; 0; 3\} \rightarrow \{4; 5; 10\},$$



2. Printr-un *tabel*.

$$g : \{-1; 0; 2; 5\} \rightarrow \{1; 2; 3\}.$$

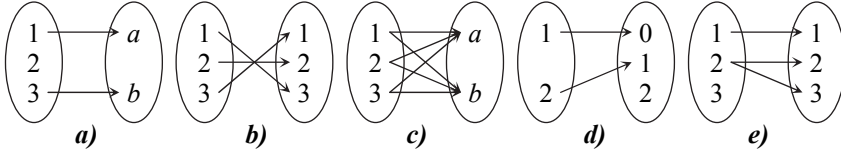
x	-1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

3. Prin una sau mai multe formule analitice:

$$h : \{0, 2, 4\} \rightarrow \{0, 4, 16\}, h(x) = x^2; \quad u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

CUNOAȘTERE ȘI EXERSARE

1. Precizați care dintre următoarele diagrame definesc funcții:



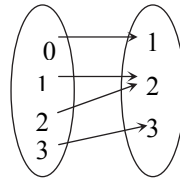
2. Precizați dacă scrierea $f : \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $f(x) = x + 1$, reprezintă o funcție.

3. Se consideră funcția $f : A \rightarrow B$ definită prin tabelul alăturat.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	3	4	5	6

- a) Domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $A = \dots\dots\dots$.
 b) Codomeniul cu numărul minim de elemente al funcției f este $B = \dots\dots\dots$.
 c) $f(-1) = \dots\dots$
 d) $f(2) = \dots\dots$

4. În imaginea alăturată este descrisă funcția $f : A \rightarrow B$.



- a) Domeniul de definiție al funcției f este $\dots\dots\dots$.
 b) Elementele mulțimii $\text{Im } f$ sunt: $\dots\dots\dots$.
 c) Elementele mulțimii G_f sunt: $\dots\dots\dots$

5. Tabloul alăturat descrie o funcție $f : A \rightarrow B$. Completați spațiile libere:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	5	6	7

- a) Elementele mulțimii A sunt: $\dots\dots\dots$.
 b) Elementele mulțimii $\text{Im } f$ sunt: $\dots\dots\dots$.
 c) Expresată printr-o formulă, legea de corespondență este $x \rightarrow f(x) = \dots\dots\dots$.

6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Completați spațiile libere:

- a) $f(-2) = \dots\dots\dots$; b) $f(0) = \dots\dots\dots$;
 c) $f(2) = \dots\dots\dots$; d) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \dots\dots\dots$.

7. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow A$.

- a) Dacă $f(x) = 2x + 1$, atunci $\text{Im } f = \dots\dots\dots$.
 b) Dacă $f(x) = 3x - 2$, atunci $\text{Im } f = \dots\dots\dots$.
 c) Dacă $f(x) = -4x + 5$, atunci $\text{Im } f = \dots\dots\dots$.

Rezolvare. a) $f(-2) = -3$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$; $f(1) = 3$; $f(2) = 5$; $f(3) = 7$. Rezultă că $\text{Im } f = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$

ACUMULARE ȘI CONSOLIDARE

8. Se consideră funcția $f : \left\{1, 4, 16, 25, \frac{9}{49}, \frac{36}{25}\right\} \rightarrow A$, $f(x) = \sqrt{x}$. Determinați mulțimea $\text{Im } f$ a valorilor funcției f .
9. Se consideră funcția $f : \{-\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}\} \rightarrow A$. Determinați $\text{Im } f$ dacă:
- a) $f(x) = \sqrt{2}x + 5$; b) $f(x) = \sqrt{2}x - 3$; c) $f(x) = 2 - \sqrt{2}x$.
10. Precizați care din următoarele legi de corespondență reprezintă o funcție:
- a) $f : \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{-3, 6, 9\}$, $f(x) = 3x$;
- b) $g : \{-2, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 1, 4\}$, $g(x) = x^2$;
- c) $h : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 3\}$, $h(x) = x^3$;
- d) $s : \{-4, 5\} \rightarrow \{-5, 0, 1, 4\}$, $s(x) = -x$.
11. Explicați dacă mulțimea indicată reprezintă graficul unei funcții definite pe mulțimea $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ cu valori în \mathbb{R} . În caz afirmativ, descrieți funcția printr-o diagramă.
- a) $G_f = \{(-2; 0); (-1; 0); (0; 1); (1; 1); (2; 2)\}$;
- b) $G_g = \{(-2; -1); (-2; 0); (-1; -1); (0; -1); (1; 2)\}$;
- c) $G_h = \{(-2; 1); (-1; -1); (0; -1); (1; 1); (1; 2); (2; 1)\}$.
12. a) Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $S = \{f; b\}$.
- b) Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea \mathbb{N} .
- Indicație.** $f : E \rightarrow \mathbb{N}$, $f(e)$ = numărul curent din catalog al elevului e .
13. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 5$. Aflați:
- a) media aritmetică a numerelor $f(-2)$ și $f(-7)$;
- b) media geometrică a numerelor $f(-2)$ și $f(-10)$.
14. Se consideră funcția $f : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow B$. Determinați $\text{Im } f$ dacă:
- a) $f(x) = |x + 3|$; b) $f(x) = |x - 2|$; c) $f(x) = |2x + 1|$.
15. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 1, 3, 5\}$. Precizați care dintre următoarele formule descriu funcția f :
- a) $f(x) = x^2 - 1$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = 1 - 2x$.

- 16.** Fie mulțimile $R = \left\{3, 14; \frac{7}{3}; 4; -1; -2\frac{1}{10}; \sqrt{10}\right\}$ și $I = \{-3; -1; 1; 2; 3; 4\}$.
- a)* Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $i: R \rightarrow I$, $i(x) = [x]$.
- b)* Scrieți elementele mulțimii G_i .
- 17.** Fie mulțimile $R = \left\{7, 2; 3\frac{1}{2}; 5; -1, 4; -\frac{1}{3}\right\}$ și $F = \{0; 0, 2; 0, 5; 0, 6; 0, (6)\}$.
- a)* Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $z: R \rightarrow F$, $z(x) = \{x\}$.
- b)* Scrieți elementele mulțimii G_z .
- 18.** Se consideră mulțimile $A = \left\{-4; \frac{2}{5}; \pi; 0; \sqrt{3}; -\frac{3}{2}\right\}$ și $S = \{-1; 0; 1\}$.
- a)* Descrieți printr-un tabel funcția $f: A \rightarrow S$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pentru } x < 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \\ 1, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$.
- b)* Precizați imaginea funcției f și scrieți elementele mulțimii G_f .
- 19.** Se consideră mulțimile $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ și $M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
- a)* Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $g: A \rightarrow M$, $g(x) = |x|$.
- b)* Scrieți elementele mulțimii G_g .
- c)* Reprezentați geometric mulțimea G_g .
- 20.** Se consideră mulțimea $A = \left\{0; 1; \frac{4}{9}; 1\frac{9}{25}; 10, 24; 11\right\}$ și funcția $h: A \rightarrow \mathbb{R}$,
- $$h(x) = \sqrt{x}.$$
- a)* Scrieți elementele mulțimii $\text{Im } h$ și efectuați $\mathbb{Q} \cap \text{Im } h$.
- b)* Descrieți printr-o formulă o funcție $p: \text{Im } h \rightarrow A$.
- 21.** Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2 \in \text{Im } f$:
- a)* $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 11$; *b)* $f: \{-3, -2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$.
- c)* $f: [-3, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$; *d)* $f: \left(-\frac{5}{4}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 3$.
- Indicație.** *a)* Dacă $-2 \in \text{Im } f$, atunci există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x) = -2$, adică $x^2 - 11 = -2$, de unde $x = 3$. Așadar, deoarece $f(3) = -2$, rezultă $-2 \in \text{Im } f$.
- 22.** Se consideră mulțimile $M = \{28; 55; 27; 39\}$ și $N = \{9; 17; 13; 4; 5\}$. Verificați dacă asocierea: “oricare $x \in M$, $x \rightarrow y = f(x) \in N$, unde $f(x)$ este divizor al lui x ”, reprezintă o funcție definită pe mulțimea M cu valori în mulțimea N .
- 23.** Se consideră mulțimea $U = \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$. Determinați imaginile funcțiilor:
- a)* $s: U \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sin x$; *b)* $t: U \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = \text{tg } x$.



APROFUNDARE ȘI DEZVOLTARE

24. Arătați că următoarele funcții sunt egale:

a) $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$ și $g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, $g(x) = |x|$;

b) $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ și $g(x) = (x - |x|)(x + |x|)$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x ;

c) $f, g : (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ și $g(x) = \frac{|x| - x}{2x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a ;

d) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x|$ și $g(x) = (\sqrt{x^2 + 1})^2 - \sqrt{(x^2 + 1)^2}$;

25. Fie funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) =$ ultima cifră a numărului natural x .

a) Determinați mulțimea $\text{Im } f$.

b) Calculați suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(100)$.

26. Fie funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) =$ ultima cifră a numărului natural 3^n .

a) Determinați mulțimea $\text{Im } f$.

b) Calculați suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2014)$.

27. a) Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A = \{a; b; c\}$ cu valori în mulțimea $B = \{0; 1\}$.

b) Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A = \{a; b\}$ cu valori în mulțimea $B = \{-1; 0; 1\}$.